

# Análise de Limitantes Superiores de Probabilidade de Erro de Bit para uma Classe de Códigos Produto

Dayan Adionel Guimarães

Departamento de Telecomunicações – Inatel. E-mail: dayan@inatel.br

**Resumo** – Este artigo apresenta alguns resultados da investigação sobre limitantes superiores de probabilidade de erro de bit para uma classe de códigos produto de dimensão  $D$ , comprimento  $n^D$ , taxa  $(1/2)^D$  e distância mínima  $4^D$ , formada por códigos componentes  $(n, n/2, 4)$  construídos segundo a regra de concatenação generalizada. Os resultados fornecidos indicam que tal classe de códigos, além de possuir baixa complexidade, tem potencial para elevados ganhos de codificação tanto para canais AWGN quanto para canais com desvanecimento Rayleigh. O método de análise de limitantes é calcado num limitante de união para códigos concatenados separados por entrelaçadores temporais. O artigo ainda apresenta uma revisão sobre este método e algumas sugestões que visam facilitar a sua implementação computacional.

**Palavras chave** – códigos produto; codificação de canal; limitante superior de probabilidade de erro de bit; limitante de união.

**Abstract** – This article presents some results of an investigation on upper bounds of bit error probability for a class of  $D$ -dimensional product codes of length  $n^D$ , rate  $(1/2)^D$  and minimum distance  $4^D$ . The component codes are  $(n, n/2, 4)$  codes constructed according to the generalized code concatenation rule. The considered class attains a simple implementation and the results shown reveal potential for considerable coding gains for the AWGN and Rayleigh fading channels. The method for bound analysis is based on a union bound for concatenated codes separated by interleavers. The article also presents a detailed review of such method and some suggestions that aims at simplifying its computational implementation.

**Key words** – product codes; channel coding; upper bounds on bit error probability; union bound.

## I. INTRODUÇÃO

Sabe-se que a simulação é uma útil ferramenta para a avaliação do desempenho de esquemas de codificação de canal. Entretanto, para sistemas com esquemas poderosos, em regiões onde a taxa de erro de bit média é muito baixa, seria preciso aguardar muito tempo para que um determinado número de erros pudesse ocorrer de forma a tornar confiável a estimativa desta taxa de erro. O uso de limitantes inferiores e superiores de probabilidade de erro

demonstra ser uma alternativa adequada a estes casos, permitindo que seja feita uma previsão do comportamento do sistema em regiões de baixas taxas de erro. Um subproduto da análise de limitantes é a possibilidade de previsão de um eventual patamar “intransponível” de erro de bit (do termo em Inglês *error floor*), fenômeno que ocorre a partir de um certo valor de relação sinal-ruído, onde as palavras-código de baixo peso começam a governar o desempenho do esquema de codificação de canal [Ran01, p. 31], não permitindo que a taxa de erro de bit seja reduzida de forma significativa com o aumento da relação sinal-ruído. Critérios de projeto de códigos corretores de erro também podem se valer do estudo de limitantes. Por exemplo, em [Ben98a] e [Ben98b] são considerados tais limitantes, aplicados a projetos de códigos concatenados.

Para códigos de bloco lineares, a análise de limitantes de probabilidade de erro de bit é calcada na análise da distribuição de pesos destes códigos. Para muitos dos códigos conhecidos já existem métodos analíticos clássicos que permitem que as suas distribuições de peso sejam obtidas. Entretanto, outros códigos ainda não tiveram suas distribuições de peso analiticamente reveladas. A situação se torna ainda mais complexa quando se trata de códigos concatenados separados por blocos de entrelaçadores temporais.

Embora possam ser identificadas várias formas para estimação de limitantes para códigos concatenados, podendo ser citadas como exemplo aquelas consideradas em [Kas97] e [Her99], optou-se neste trabalho por utilizar o método sugerido por S. Benedetto *et. al.* em [Ben96], [Ben98a] e [Ben98b], e reapresentado em [Ben99], por questões de simplicidade e por ser suficiente à investigação aqui considerada. A idéia básica deste método consiste em se escolher a regra de entrelaçamento temporal de forma independente e uniformemente distribuída dentre um rol das possíveis permutações dos bits de entrada do entrelaçador, neste contexto denominado “entrelaçador uniforme”. Com essa alternativa a análise passa a corresponder a uma análise de comportamento médio, levando a cálculos de “limitantes médios” de probabilidade de erro de bit.

As demais seções desse trabalho encontram-se organizadas da seguinte maneira: a seção II revisa alguns conceitos sobre a estimação de limitantes de probabilidade de erro. A seção III apresenta as ferramentas para cálculo do limitante superior de máxima verossimilhança para a probabilidade de erro de bit, para códigos de bloco lineares concatenados em série, em canais AWGN e Rayleigh, segundo o

método considerado em [Ben99]. As abordagens das seções II e III visam auxiliar o leitor numa eventual implementação deste método para a análise de outros códigos de bloco concatenados em série e também visam situar as simplificações sugeridas nesse artigo no contexto do referido método. Na seção IV é apresentada a classe de códigos produto alvo da análise de limitantes e são registrados e comentados alguns resultados. Finalmente, na seção V, registram-se um breve sumário do trabalho e outros comentários complementares.

**II. LIMITANTE SUPERIOR DE PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT**

Nesta seção são revisados os principais fundamentos relacionados ao estudo de limitantes superiores de probabilidade de erro de bit para códigos de bloco lineares em canal AWGN e Rayleigh.

**II.1. A PROBABILIDADE DE ERRO PAR-A-PAR E O LIMITANTE DE UNIÃO**

A discussão sobre limitantes superiores de probabilidade de erro de palavra em sistemas com codificação de canal inicia-se em torno do conceito de *probabilidade de erro par-a-par*  $P\{s_i \rightarrow s_j\}$ . Essa é a probabilidade de, tendo-se transmitido o sinal  $s_i$ , ter-se  $s_j$  mais próximo do vetor recebido  $\mathbf{r}$  do que  $s_i$ ,  $i = j = 1, 2, \dots, M$ . Para um sistema com modulação  $M$ -ária qualquer, se  $s_i$  é transmitido, um erro ocorre se um dos demais sinais é escolhido pelo receptor. Mas sabe-se que a probabilidade da união de eventos é menor que a soma das probabilidades de ocorrência de cada evento individualmente considerado. A esse limite é dado o nome de *limitante de união*, que no presente contexto pode ser escrito como

$$P_p(s_i) \leq \sum_{s_i \neq s_j} P\{s_i \rightarrow s_j\} \tag{1}$$

onde  $P_p(s_i)$  é a probabilidade de, tendo-se transmitido a palavra-código  $s_i$ , ter-se a decisão tomada em favor de qualquer outra palavra  $s_i \neq s_j$ .

A determinação da probabilidade de erro de palavra média,  $P_p$ , deve levar em consideração uma média de (1) em todas as  $M$  possibilidades das palavras enviadas através do canal, levando a [Ben99, p. 191]

$$P_p \leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{d_{ij}}{2\sqrt{N_0}} \right) \tag{2}$$

onde  $d_{ij} = |s_i - s_j|$  é a distância Euclidiana entre  $s_i$  e  $s_j$  e  $N_0$  é a densidade espectral de potência de ruído. Mas a propriedade do erro uniforme [Ben99, p. 505] dita que a probabilidade de erro condicionada à transmissão de uma dada palavra-código não depende de qual seja esta palavra. Esta é uma propriedade válida para códigos lineares e permite que a probabilidade de erro par-a-par possa ser avaliada admitindo-se o envio da palavra toda-nula. Assim não é necessário efetuar a

média explicitada em (2) e pode-se escrever a probabilidade de erro de palavra média como sendo

$$P_p \leq \sum_{m=2}^M P(\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_m) \tag{3}$$

onde  $\mathbf{x}_1$  corresponde à palavra código toda-nula. Mas a probabilidade  $P\{\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{x}_m\}$  depende, como em (2), da distância Euclidiana entre as duas palavras-código consideradas. Para uma palavra-código  $m$  com peso de Hamming  $w_m$ , sabendo que a energia da forma de onda transmitida em cada intervalo de sinalização vale  $E_s$  Joules, para a sinalização antipodal tem-se

$$d_{1m}^2 = |\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_m|^2 = w_m \left| \sqrt{E_s} - (-\sqrt{E_s}) \right|^2 = 4w_m E_s = 4w_m R_c E_b \tag{4}$$

onde  $R_c = k/n$  é a taxa do código e  $E_b = E_s/R_c$  é a energia média por bit de informação. Levando os resultados (3) e (4) em (2), a probabilidade de erro de palavra para sinalização antipodal em canal AWGN, sem quantização no receptor e com decisão suave, pode ser determinada por [Ben99, p. 511]

$$P_p \leq \frac{1}{2} \sum_{m=2}^M \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{w_m R_c E_b}{N_0}} \right) \tag{5}$$

Agrupando, no conjunto das  $M$  palavras-código, as  $A_h$  palavras-código de mesmo peso  $h$ , pode-se escrever (5) como [Ben99]

$$P_p \leq \frac{1}{2} \sum_{h=d_{\min}}^n A_h \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{h R_c E_b}{N_0}} \right) \tag{6}$$

sendo  $n$  o comprimento de cada palavra-código e  $d_{\min}$  a distância mínima de Hamming do código (que é igual ao menor peso dentre as palavra-código, excetuando-se a palavra toda nula). Através de (6) pode-se perceber que para que se possa determinar a probabilidade de erro de palavra é necessário conhecer a distribuição de pesos das palavras-código. A esta distribuição normalmente associa-se uma função, a Função de Distribuição de Pesos (WEF, do Inglês *Weight Enumerating Function*), definida por

$$A(H) = \sum_{h=0}^n A_h H^h \tag{7}$$

onde  $H$  é uma variável auxiliar e  $A_h$  já foi definido como o número de palavras-código de peso  $h$ .

**II.2. PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT PARA CÓDIGOS DE BLOCO LINEARES**

Para o cálculo da probabilidade de erro de bit deve-se levar em consideração o número de eventos de erro, sendo a probabilidade de ocorrência de cada evento ponderada por um valor que é função do número de bits em erro em cada evento. É necessário, então, conhecer não somente a distribuição de pesos das palavras código, mas também a distribuição dos

pesos das palavras de informação associadas às palavras código de cada peso. Uma expressão que traduz esse procedimento pode ser [Ben99, p. 513]

$$P_b = \sum_{j=2}^M \frac{w(\mathbf{u}_j)}{k} P(\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_1) \quad (8)$$

onde  $M = 2^k$  é o número de palavras-código,  $P(\mathbf{x}_j | \mathbf{x}_1)$  é a probabilidade de ser decodificada uma palavra-código  $\mathbf{x}_j$  diferente da palavra-código toda-nula  $\mathbf{x}_1$ , dado que a palavra toda nula foi transmitida e  $w(\mathbf{u}_j)$  é o peso de Hamming da palavra de informação de comprimento  $k$  que gera a palavra-código  $\mathbf{x}_j$ .

Pelo fato do cálculo envolvendo (8) apresentar complexidade exponencialmente crescente em  $k$ , o limitante de união é utilizado em vez do cálculo exato através de (8). Como a probabilidade de erro de bit é função não somente da distribuição de pesos das palavras-código, mas também dos pesos das palavras de informação associados às palavras-código de um determinado peso, utiliza-se no cálculo do limitante de união a Função de Distribuição de Pesos de Entrada-Saída (IOWEF, do Inglês *Input-Output Weight Enumerating Function*), definida como [Ben99]

$$B(W, H) = \sum_{w=0}^k \sum_{h=0}^n B_{w,h} W^w H^h \quad (9)$$

onde  $B_{w,h}$  é o número de palavras-código de peso  $h$  geradas por palavras de informação de peso  $w$ . As variáveis  $W$  e  $H$  são variáveis auxiliares. A Função de Distribuição de Pesos (WEF) pode ser facilmente obtida a partir da IOWEF [Ben99, p. 514]:

$$A(H) = A(W, H)|_{W=1} = \sum_{h=0}^n A_h H^h, \quad (10)$$

$$\text{onde } A_h = \sum_{w=0}^k B_{w,h}$$

As distribuições de pesos para alguns códigos de bloco, em qualquer dos formatos anteriormente descritos, podem ser obtidas analiticamente. Para outros códigos, contudo, as distribuições de pesos não foram ainda analiticamente encontradas e cálculos computacionais podem ser empregados nestes casos como forma de estima-las.

Para reduzir a complexidade no processo de cálculo de limitantes, principalmente quando este cálculo é realizado por computador, em vez da função IOWEF é mais conveniente operar com uma matriz dos coeficientes da IOWEF (aqui denominada IOWEM, por razão óbvia). Nesta proposta de simplificação, os elementos não nulos da IOWEM de ordem  $(k + 1) \times (n + 1)$  correspondem aos valores de  $B_{w,h}$ , localizados na  $w$ -ésima linha e na  $h$ -ésima coluna. No mapeamento da IOWEM para a IOWEF, o expoente da variável  $W$  corresponde aos índices das linhas da matriz IOWEM (pesos das palavras de informação), os expoentes da variável  $H$  correspondem aos índices das colunas dessa matriz

(pesos das palavras-código) e os coeficientes  $B_{w,h}$  correspondem aos elementos não nulos na matriz IOWEM, localizados nas coordenadas  $(w, h)$ .

O limitante superior de probabilidade de erro de bit, para o caso de decodificação de máxima verossimilhança com decisão suave e quantização infinita, em canal AWGN, pode ser estimado através de [Ben99, p 514]

$$P_b \leq \sum_{w=1}^k \frac{w}{2k} \sum_{h=d_{\min}}^n B_{w,h} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{hR_c E_b}{N_0}} \right) \quad (11)$$

onde  $R_c = k/n$  é a taxa do código.

### III. PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT PARA CÓDIGOS DE BLOCO LINEARES CONCATENADOS EM SÉRIE

Nesta seção, os conceitos abordados na seção anterior são aplicados ao estudo de limitantes de probabilidade de erro de bit para códigos de bloco lineares concatenados em série. O estudo analítico de esquemas com concatenação paralela ou serial apresenta inquestionáveis desafios, principalmente quando o código resultante é longo. Em [Ben96], [Ben98a] e [Ben98b] é introduzida uma forma alternativa para o tratamento analítico das concatenações paralelas e seriais, buscando reduzir a complexidade inerente das análises teóricas clássicas. As ferramentas propostas em [Ben96] para o estudo da concatenação paralela e em [Ben98a] e [Ben98b] para a concatenação serial, ambas rerepresentadas em [Ben99], são baseadas na análise de um desempenho médio desses esquemas. A análise apresentada nestes artigos é calcada em limitantes de probabilidade de erro calculados a partir de uma “distribuição média” de pesos do código concatenado. Esta distribuição leva em consideração que o entrelaçador temporal existente entre os códigos componentes é um dispositivo probabilístico, o entrelaçador uniforme, levando, então, a uma análise de comportamento médio do desempenho da concatenação.

O uso do conceito de entrelaçador temporal uniforme simplifica significativamente a avaliação de desempenho de códigos concatenados, apesar do resultado obtido não refletir o desempenho real, dada uma regra de entrelaçamento temporal específica. Contudo, em [Ben96] demonstra-se que o desempenho obtido por meio de um entrelaçador temporal uniforme é atingível ao menos por um entrelaçador temporal com uma regra de entrelaçamento específica; e, de fato, uma regra qualquer de entrelaçamento temporal escolhida aleatoriamente se comportará, com grande probabilidade, de forma similar à média. Por outro lado, algumas simples regras de entrelaçamento já conhecidas podem levar a limitantes abaixo do limitante médio. Mais adiante é apresentado um exemplo deste caso.

Através da análise dos resultados fornecidos em [Ben96], [Ben98a], [Ben98b] e [Ben99], conclui-se que o aumento do bloco de entrelaçamento temporal em esquemas com concatenação paralela não traz

significativos ganhos de desempenho e, além disso, o pequeno acréscimo no desempenho tende a se saturar a partir de um determinado comprimento deste bloco de entrelaçamento temporal. Por esta razão optou-se pela concatenação serial inerentemente presente na estrutura de um código produto, para a qual o comprimento do entrelaçador temporal é naturalmente elevado à medida que se aumenta a dimensão do código.

### III.1. ANÁLISE DE LIMITANTES PARA CONCATENAÇÃO SERIAL DE DOIS CÓDIGOS DE BLOCO EM CANAL AWGN

A Fig. 1 mostra o diagrama em blocos da concatenação serial de dois códigos de bloco. Ela é formada por um código externo  $(mq, mk)$  de taxa  $R_{ce} = k/q$  conectado, via um bloco de entrelaçamento temporal de comprimento  $N = mq$ , a um código interno  $(mn, mq)$  de taxa  $R_{ci} = q/n$ , resultando em um código  $(mn, mk)$  de taxa  $R_{ce}R_{ci} = k/n$ .

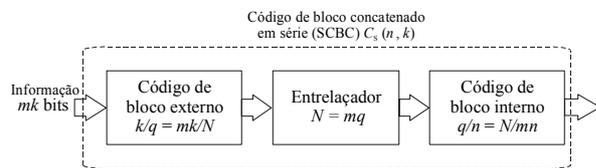


Fig. 1. Diagrama da concatenação serial de códigos de bloco (adaptado de [Ben99]).

O número de palavras-código de peso  $h$  do código concatenado associadas às palavras de informação de peso  $w$ , para  $m = 1$ , é dado por [Ben98b, p. 912]

$$B_{w,h}^{C_s} = \sum_{l=0}^N \frac{B_{w,l}^{C_e} B_{l,h}^{C_i}}{\binom{N}{l}} \quad (12)$$

Para blocos de entrelaçamento temporal de tamanho  $N = mk$  e  $m > 1$ , em [Ben98b] são apresentadas expressões derivadas da expressão (12) em formatos que envolvem a Função de Distribuição de Pesos Condicional (CWEF, do Inglês *Conditional Weight Enumerating Function*) dos códigos componentes, definida como [Ben99, p. 514]

$$B_w(H) = \sum_{h=0}^n B_{w,h} H^h = \frac{1}{w!} \left. \frac{\partial^w B(W,H)}{\partial W^w} \right|_{W=0} \quad (13)$$

Portanto, o procedimento apresentado em [Ben98a] para que seja estimada a distribuição de pesos do código concatenado para  $m > 1$  pressupõe o conhecimento das IOWEFs dos códigos componentes, elevadas ao expoente  $m$ , de forma que, a partir destas, seja possível obter as CWEFs e seja finalmente possível estimar a IOWEM do código concatenado. A partir da IOWEM do código resultante, o uso de (11) permite que seja estimado o limitante superior de probabilidade de erro de bit para a concatenação serial, em canal AWGN.

Com o aumento do comprimento do bloco de entrelaçamento temporal, o uso da expressão (11) se torna computacionalmente cada vez mais complexo. Este fato, também observado em [Ben98b], sinaliza que o grande número de termos a somar nestas expressões quando  $N > 100$  pressupõe que as somas sejam truncadas de forma a tornar a solução do problema algo computacionalmente razoável em termos de complexidade e tempo. O uso de operações envolvendo as *funções* de distribuição de pesos também representa uma limitação à implementação dos cálculos com o auxílio de computador, pois pressupõe a utilização de cálculos simbólicos.

Uma forma alternativa de reduzir a complexidade dos problemas mencionados no parágrafo anterior reside no uso das matrizes dos coeficientes das IOWEFs dos novos códigos componentes, as IOWEMs. Porém, as novas IOWEMs devem ser obtidas a partir da  $m$ -ésima potência das funções IOWEFs e, para elevados valores de  $m$ , os cálculos simbólicos envolvendo tais funções se torna impraticável. De forma a evitar este significativo e às vezes irrealizável trabalho adicional sugere-se aqui um algoritmo capaz de permitir que sejam calculadas as novas IOWEMs dos códigos componentes para  $m \geq 1$  a partir das IOWEMs originais desses códigos. Tendo calculado-as, pode-se aplicar expressões derivadas da expressão (12) de tal sorte que seja obtida a matriz IOWEM do novo código concatenado. A expressão (12) é novamente apresentada a seguir, com ligeiras modificações de notação de forma a levar em conta operações para  $m \geq 1$ :

$$B_{w,h}^{C_s^m} = \sum_{l=0}^N \frac{B_{w,l}^{C_e^m} B_{l,h}^{C_i^m}}{\binom{N}{l}} \quad (14)$$

Em (14), tomando como auxílio a Fig. 1, tem-se:

- $B_{w,h}^{C_s^m}$  são os elementos da matriz IOWEM do código com concatenação serial, de ordem  $(mk+1) \times (mn+1)$ . Seus valores correspondem ao número de palavras-código de peso  $mh$  associadas às palavras de informação de peso  $mw$ , sendo  $mh$  o peso das palavras-código do novo código interno  $C_i$  de taxa  $N/mn$ , associadas às palavras de informação de peso  $l$  e onde  $l$  é o peso das palavras-código do novo código externo  $C_e$  de taxa  $mk/n$ , associadas às palavras de informação de peso  $mk$ .  $k$  é o comprimento das palavras de informação do código básico externo e  $n$  é o comprimento das palavras-código do código básico interno;
- $B_{w,l}^{C_e^m}$  e  $B_{l,h}^{C_i^m}$  são os elementos das matrizes IOWEMs da  $m$ -ésima potência das funções IOWEFs dos códigos externo e interno, respectivamente. Tais matrizes possuem ordem  $(mk+1) \times (N+1)$  e  $(N+1) \times (mn+1)$ , respectivamente para os códigos externo e interno;

□  $N = mq$  é o comprimento do bloco de entrelaçamento temporal, múltiplo inteiro do comprimento de uma palavra-código do código externo de taxa  $mk/mq = k/q$ .

O algoritmo que permite obter a matriz dos coeficientes da  $m$ -ésima potência das funções IOWEFs dos códigos componentes para concatenação paralela ou serial, sem a realização de manipulações simbólicas é:

**Algoritmo 1.**

1. dada a matriz IOWEM de ordem  $(k+1) \times (n+1)$ , obtida a partir da IOWEF do código componente  $(n, k)$  em questão ou a partir de cálculo computacional, adicione à sua direita uma matriz com  $n(m-1)$  colunas todas nulas, gerando a matriz  $IOWEM_e$ , onde o subscrito  $e$  significa *estendida*;
2. transforme essa nova matriz  $IOWEM_e$  em um vetor IOWEV que contenha todos os elementos de  $IOWEM_e$ ; o primeiro elemento do vetor IOWEV corresponde ao elemento na primeira linha e primeira coluna da  $IOWEM_e$ ; o segundo elemento corresponde ao elemento na primeira linha e segunda coluna da  $IOWEM_e$ , e assim por diante; o último elemento do IOWEV corresponde ao elemento da última linha e última coluna da  $IOWEM_e$ ;
3. se  $m = 1$  vá para o próximo passo. Se  $m > 1$ , para  $j$  variando de 0 a  $m-2$  crie, de forma recursiva, o vetor  $IOWEV_{e,(j)} \leftarrow IOWEV_e * IOWEV_{e,(j-1)}$ , onde “\*” representa uma operação de convolução discreta;
4. transforme o vetor  $IOWEV_e$  em uma matriz de ordem  $(km+1) \times (kn+1)$ . Esta matriz é a matriz dos coeficientes da  $m$ -ésima potência da função IOWEF do novo código componente  $(mn, mk)$  em questão.

Para aumentar a velocidade dos cálculos computacionais envolvendo o Algoritmo 1 pode-se operar com a matriz dos coeficientes da Função de Distribuição de Pesos de Entrada-Paridade (IRWEF, do Inglês *Input-Redundancy Weight Enumerating Function*) do código sob análise, que também pode ser obtida a partir da IOWEF e é definida como [Ben96, p. 410]

$$C(W, Z) = \sum_{w=0}^k \sum_{z=0}^{n-k} C_{w,z} W^w Z^z \quad (15)$$

onde  $C_{w,z}$  é o número de palavras-código geradas por palavras de informação de peso  $w$  e cujas paridades tem peso  $z$ . Obviamente,  $w + z$  é o peso total da palavra-código. Porém, isto é possível desde o código seja sistemático. Neste caso, o novo valor de  $n$  será  $n \leftarrow (n - k)$  e ao final do passo 4 deve-se converter a matriz IRWEM obtida na matriz IOWEM.

A convolução discreta do passo 3 do Algoritmo 1 leva, como se sabe, a um vetor que tem como número de elementos a soma, menos 1, do número de elementos dos vetores envolvidos. Seus elementos

correspondem exatamente aos coeficientes do produto das funções representadas pelas IOWEMs ou pelos IOWEVs correspondentes. O preenchimento de cada linha da IOWEM, citado no passo 1 do Algoritmo 1, tem por objetivo fazer com que esses elementos sejam localizados nas coordenadas adequadas da matriz IOWEM resultante, posto que o número de elementos dessa matriz difere do número de elementos resultado da operação de convolução discreta. Em suma, a simples operação que acaba de ser sugerida leva ao mesmo resultado que elevar ao expoente  $m$  a função IOWEF dos códigos componentes e da nova função obter a IOWEM eliminando, dessa forma, a necessidade de operações simbólicas.

**III.2. ANÁLISE DE LIMITANTES PARA CONCATENAÇÃO SERIAL DE TRÊS CÓDIGOS DE BLOCO EM CANAL AWGN**

A Fig. 2 ilustra a concatenação serial de três códigos de bloco. A seqüência de bits de informação com  $mk$  bits é codificada pelo codificador externo de taxa  $k/q = mk/N_1$ , de  $k$  em  $k$  bits, e a saída desse codificador, com  $N_1 = mq$  bits alimenta um bloco de entrelaçamento temporal de comprimento  $N_1$  bits. A saída do primeiro entrelaçador alimenta o codificador de canal intermediário de taxa  $q/p = N_1/mp$  e a seqüência codificada por este codificador, de comprimento  $N_2 = mp$ , serve como entrada para um segundo bloco de entrelaçamento temporal de  $N_2$  bits. A saída desse segundo bloco entrelaçador alimenta um codificador interno de taxa  $p/n = N_2/mn$  e a saída deste codificador corresponde ao código concatenado final, de taxa  $k/n$ .

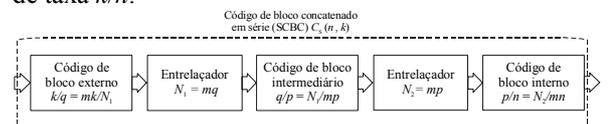


Fig. 2. Diagrama da concatenação serial de três códigos de bloco.

O limitante de probabilidade de erro de bit média para um esquema de codificação formado pela concatenação serial ilustrada através da Fig. 2, em canal AWGN, pode ser calculado através da expressão (11).

A distribuição de pesos do código concatenado pode ser determinada em termos médios usando a mesma idéia dos entrelaçadores temporais uniformes de S. Benedetto e outros. Para esta concatenação dupla tem-se [Ben98a]

$$B_{w,h}^{C_s} = \sum_{l_1=0}^{N_1} \sum_{l_2=0}^{N_2} \frac{B_{w,l_1}^{C_1} B_{l_1,l_2}^{C_2} B_{l_2,h}^{C_3}}{\binom{N_1}{l_1} \binom{N_2}{l_2}} \quad (16)$$

onde, tomando como referência a Fig. 2, tem-se:

□  $B_{w,h}^{C_s}$  são os elementos da matriz IOWEM do código com concatenação serial, de ordem  $(mk+1) \times (mn+1)$ . Seus valores correspondem ao

número de palavras-código de peso  $mh$ , associadas às palavras de informação de peso  $mw$ .  $mh$  é o peso das palavras-código do código interno  $C_3$ , de taxa  $N_2/mn$ , associadas às palavras de informação de peso  $l_2$ , onde  $l_2$  é o peso das palavras-código do código intermediário  $C_2$ , de taxa  $N_1/mp$ , associadas às palavras-código de entrada do codificador intermediário de peso  $N_1$ .  $N_1$  é o peso das palavras-código do codificador externo de taxa  $mk/N_1$ ,  $k$  é o comprimento das palavras de informação do código básico externo e  $n$  é o comprimento das palavras-código do código básico interno;

- $B_{w,l_1}^{C^m}$ ,  $B_{l_1,l_2}^{C^m}$  e  $B_{l_2,h}^{C^m}$  são os elementos das matrizes IOWEM da  $m$ -ésima potência das funções IOWEF dos códigos externo, intermediário e interno, respectivamente. Tais matrizes possuem ordem  $(mk+1) \times (N_1+1)$ ,  $(N_1+1) \times (N_2+1)$  e  $(N_2+1) \times (mn+1)$ , respectivamente para os códigos externo, intermediário e interno;
- $N_1 = mq$  e  $N_2 = mp$  são os comprimentos dos blocos de entrelaçamento temporal.  $N_1$  é múltiplo inteiro do comprimento de uma palavra-código do código externo de taxa  $mk/mq = k/q$ .  $N_2$  é múltiplo inteiro do comprimento de uma palavra-código do código intermediário de taxa  $mq/mp = q/p$ .

Pelos motivos já citados anteriormente, a obtenção da solução de (11), levando-se em conta (16), apresenta limitações para cálculos computacionais em termos de complexidade e tempo. Mais uma vez, a operação com as matrizes IOWEM dos códigos envolvidos e o uso do Algoritmo 1 permitem significativa redução de complexidade e tempo de cálculo. Mas ainda assim, em certos casos, o valor de  $m$  pode ser suficientemente elevado a ponto de fazer com que a solução de (11) seja extremamente lenta devido ao elevado número de termos a somar nesta expressão, mesmo que a resolução de (16) seja simples e rápida. Como alternativa pode-se reduzir cuidadosamente os limites máximos de cada somatório envolvido. Essa redução, contudo, não deve permitir que o limitante procurado seja significativamente alterado, principalmente em regiões de altos valores de  $E_b/N_0$ . Para baixos valores dessa relação, o limitante de união já possui como característica uma divergência em seus valores e, portanto, imprecisão. O que a redução nos limites dos citados somatórios pode então permitir é uma alteração significativa apenas nesta região de baixos valores de  $E_b/N_0$ . E isso realmente ocorre quando tais limites são reduzidos.

### III.3. EXTENSÃO DAS ANÁLISES DE LIMITANTES PARA CANAL COM DESVANECIMENTO RAYLEIGH

Combinando resultados obtidos em [Hal96, Capítulo 3] e aqueles apresentados nos parágrafos anteriores, pode-se determinar o limitante superior de probabilidade de erro de palavra e de bit para um esquema de codificação em canal Rayleigh. Para tanto, considere que o canal Rayleigh seja plano e sem

memória e que se esteja utilizando sinalização antipodal BPSK para a qual a energia média por símbolo recebido vale  $\bar{E}_s = R_c \bar{E}_b = E\{g^2\} R_c E_b$ , com demodulação coerente e informação de estado de canal conhecida pelo receptor. Para este caso, o limitante superior de probabilidade de erro de palavra para um código linear de taxa  $R_c$ , condicionado ao vetor estado de canal  $\mathbf{g}$ , pode ser determinado por

$$P_p(\mathbf{g}) \leq \frac{1}{2} \sum_{h=d_{\min}}^n A_h \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{R_c \bar{E}_b}{N_0} \sum_{i=1}^h g_i^2} \right) \quad (17)$$

O valor médio da probabilidade de erro de palavra é então calculado realizando-se a média de (17) em relação à função densidade de probabilidade dos ganhos do canal. A integral  $n$ -upla que faz parte desta média não possui solução analítica fechada e em [Hal96, p. 34] é apresentada uma solução numérica que leva ao limitante

$$P_p \leq \sum_{h=d_{\min}}^n A_h \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\sin^2 \varphi}{R_c E_b / N_0 + \sin^2 \varphi} \right]^h d\varphi \quad (18)$$

A partir de (18) e dos resultados já apresentados nesse trabalho pode-se determinar o limitante superior de probabilidade de erro de bit em função dos coeficientes da Função de Distribuição de Pesos de Entrada-Saída definida por (9), ou seja

$$P_b \leq \sum_{h=d_{\min}}^n \sum_{w=1}^k \frac{w}{k\pi} B_{w,h} \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{\sin^2 \varphi}{R_c E_b / N_0 + \sin^2 \varphi} \right]^h d\varphi \quad (19)$$

## IV. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS CÓDIGOS PRODUTO

Nessa seção, o método de análise de limitantes superiores de probabilidade de erro de bit considerado nas seções anteriores é aplicado na análise de um esquema de concatenação serial particular, correspondente à classe de códigos produto de dimensão  $D$  sugerida em [Gui03]. Esta análise foi efetuada para códigos de dimensão  $D = 2$  e  $D = 3$ , com componentes (8,4,4) e (12,6,4), em canal AWGN e Rayleigh.

### IV.1. DESCRIÇÃO DA CLASSE DE CÓDIGOS PRODUTO

Os códigos produto multidimensionais em questão são implementados através da utilização de códigos componentes não-sistemáticos idênticos em toda as dimensões. Esses códigos componentes são um exemplo de aplicação da regra de concatenação generalizada de códigos (GCC, *Generalized Code Concatenation*) [Bos00]. Seja  $c_1$  uma palavra-código do código de repetição  $C_1 = (n/2, 1, n/2)$  e  $c_2$  uma palavra-código do código de paridade simples  $C_2 = (n/2, n/2-1, 2)$ . Uma palavra-código  $c$  do código não-

sistemático  $C = (n, k, d_{\min}) = (n, n/2, 4)$  pode ser determinada por

$$\mathbf{c} = [01]\mathbf{c}_1 \oplus [11]\mathbf{c}_2 \quad (20)$$

onde a soma  $\oplus$  é em GF(2) e o produto  $[01]\mathbf{c}_1$  é calculado substituindo-se um 0 em  $\mathbf{c}_1$  por 00 e um 1 por 01. O mesmo é feito para  $[11]\mathbf{c}_2$ , onde agora um 1 torna-se 11.

A Fig. 3 ilustra a uma possível representação por treliça para o código (8,4,4) construído através da regra descrita. Observando tal treliça, verifica-se que se trata de uma estrutura paralelizada de treliças de um código de paridade simples nos alfabetos {00, 11} e {01, 10}, o que permite a implementação de simples algoritmos de decodificação, como aquele sugerido em [Gui03]. Nesta figura, os rótulos  $x/yy$  ou  $xx/yy$  correspondem ao(s) bit(s) da palavra de informação  $x$  ou  $xx$  associado(s) aos bits codificados  $yy$ .

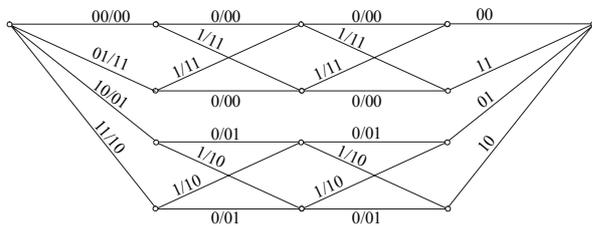


Fig. 3. Treliça para o código (8,4,4).

Utilizando o mesmo código não-sistemático  $C$  como código componente em cada uma das  $D$  dimensões, é obtido um código produto de comprimento  $n^D$ , taxa  $(1/2)^D$  e distância mínima  $4^D$ . A Fig. 4 ilustra a estrutura geométrica de tal código quando  $D = 3$  e  $n = 8$ . Este código é denotado como  $(8,4,4)^3 = (n, n/2, 4)^D$ . O bloco tridimensional com 64 bits de informação contém quatro arranjos bidimensionais  $4 \times 4$ . No primeiro passo, cada arranjo é codificado linha-a-linha, levando a quatro arranjos bidimensionais  $4 \times 8$  e um total de 128 bits codificados. Então, no segundo passo, cada um desses arranjos é codificado coluna-a-coluna, levando a quatro arranjos bidimensionais  $8 \times 8$  e um total de 256 bits codificados. Finalmente, no terceiro passo, esses arranjos são interpretados como consistindo de oito arranjos bidimensionais  $4 \times 8$  e são codificados na “direção” da dimensão  $d = 3$  para gerar o bloco de 512 bits codificados.

Iniciando com  $k^D$  bits de informação, é possível construir um bloco de bits codificados nas  $D$  dimensões. Neste caso, deve-se interpretar o código produto de dimensão  $D$  como uma concatenação serial de  $D$  códigos separados por  $D - 1$  entrelaçadores temporais de bloco (*block interleavers*), para os quais [Gui03] o número de colunas é sempre  $N_c = n$  e o número de linhas do entrelaçador entre os códigos  $d$  e  $d + 1$  é

$$N_l = n^{d-1} k^{D-d} \quad (21)$$

Se (21) é satisfeita, é possível verificar [Gui03] que todos os  $n^{D-1}$  vetores de  $n$  elementos orientados na

“direção” de cada dimensão no “hipercubo”  $D$ -dimensional de  $n^D$  bits codificados são palavras-código de  $C$ . Esta propriedade facilita a implementação de processos de decodificação iterativa nos quais, a cada iteração, opera-se com as palavras-código identificadas em cada dimensão no bloco de  $n^D$  bits sem a necessidade de decodificação no sentido inverso da codificação (do código mais interno para o mais externo), excetuando-se dessa situação o mapeamento final das palavras-código nas palavras de informação, após concluídas todas as iterações [Gui03].

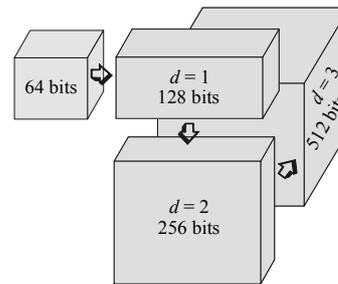


Fig. 4. Construção de um código produto  $(8,4,4)^3$ .

## IV.2. ANÁLISE DE LIMITANTES

Considere o código de bloco (8,4,4) não-sistemático construído conforme a regra de concatenação generalizada que acaba de ser descrita, e cuja distribuição de pesos é equivalente à distribuição de pesos do código de Hamming Estendido (8,4,4). A WEF para este código vale  $A(H) = 1 + 14H^4 + H^8$ . Com o auxílio de uma simples procura computacional pode-se determinar a matriz de distribuição de pesos IOWEM de ordem  $(k + 1) \times (n + 1) = 5 \times 9$  relacionada à IOWEF:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Segundo a definição aqui proposta para a matriz IOWEM faz-se a seguinte interpretação sobre a distribuição de pesos do código (8,4,4): tem-se 1 palavra-código de peso 0, gerada por 1 palavra de informação também de peso 0; tem-se 4 palavras-código de peso 4, geradas por 4 palavras de informação de peso 1; tem-se 6 palavras-código de peso 4, geradas por 6 palavras de informação de peso 2; tem-se ainda 4 palavras-código de peso 4, geradas por 4 palavras de informação de peso 3 e, finalmente, tem-se 1 palavra-código de peso 8, gerada por 1 palavra de informação de peso 4. Da IOWEM pode-se obter diretamente a IOWEF:  $B(W,H) = 1 + W(3H^4) + W^2(6H^4) + W^3(4H^4) + W^4H^8$ .

Considere agora a concatenação de três códigos de bloco com componentes (8,4,4) separados por entrelaçadores temporais, conforme a Fig. 2, formando o código produto  $(8,4,4)^3$ . Seja  $m = k^2 = 16$ , o que significa que um bloco de entrada do código

concatenado possui  $mk = k^3 = 64$  bits. Nesse caso  $N_1 = 128$  bits. O código intermediário terá como bloco de entrada um conjunto de 128 bits entrelaçados e como saída um bloco de 256 bits. Portanto  $N_2 = 256$ . O código interno terá 256 bits como bloco de entrada e 512 bits de saída. A taxa resultante será  $64/512 = 1/8$ . O bloco de entrelaçamento da esquerda (vide Fig. 2) terá então  $8^0 \cdot 4^{3-0-1} = 16$  linhas por 8 colunas. O bloco de entrelaçamento da direita terá  $8^1 \cdot 4^{3-1-1} = 32$  linhas por 8 colunas.

O limitante superior de probabilidade de erro de bit para o código produto  $(8,4,4)^3$  em questão é calculado através da expressão (11) para canal AWGN e através da expressão (19) para canal Rayleigh plano com conhecimento do estado de canal pelo receptor. Ambas as expressões, no entanto, necessitam que sejam estimadas as distribuições de peso IOWEF dos códigos componentes para que seja estimada a IOWEF do código resultante através de (16). Uma significativa redução na complexidade dos cálculos pode ser alcançada operando-se com as matrizes IOWEM. Por exemplo, a matriz IOWEM do código externo é formada pelos coeficientes da função IOWEM do código  $(8,4,4)$  elevada ao expoente  $m = 16$ ; a matriz IOWEM do código intermediário é formada pelos coeficientes da função IOWEM do código  $(8,4,4)$  elevada ao expoente  $2m = 32$  e a matriz IOWEM do código interno é formada pelos coeficientes da função IOWEM do código  $(8,4,4)$  elevada ao expoente  $4m = 64$ . Todas estas matrizes podem ser obtidas através do Algoritmo 1 sugerido neste trabalho e com os resultados em (16) obtém-se a IOWEM do código resultante. Os elementos desta matriz são finalmente operados em (11) e (19), levando aos limitantes procurados. As matrizes resultantes de cada operação intermediária do procedimento que acaba de ser descrito não foram apresentadas devido às suas elevadas ordens.

A Fig. 5 mostra resultados referentes aos códigos  $(8,4,4)$  e  $(12,6,4)$  isoladamente e aos códigos produto  $(8,4,4)^2$  e  $(12,6,4)^2$ , em canal AWGN. A probabilidade de erro de bit teórica para sinalização BPSK neste canal é também registrada na Fig. 5 para fins de comparação. Nota-se nesta figura que embora o aumento do comprimento dos códigos isolados de 8 para 12 não tenha demonstrado potenciais melhorias, os códigos produto bidimensionais (2D) com componentes  $(12,6,4)$  possuem limitantes mais reduzidos, cerca de 1 dB, em relação àqueles com componentes  $(8,4,4)$ , sendo que o código  $(12,6,4)^2$  indica potenciais de ganhos de codificação maiores que 4,5 dB para valores de taxa de erro de bit menores que  $10^{-5}$ . Nesta figura também é fornecido o limitante superior calculado com a distribuição de pesos real do código  $(8,4,4)^2$ , revelando que a regra de entrelaçamento utilizada para este código 2D é superior à regra uniforme considerada em [Ben99] e que, para a presente análise, o limitante de Benedetto *et. al.* [Ben99] é um limitante pessimista para os códigos 2D. Esta última observação também aplica-se à análise no canal Rayleigh apresentada na Fig. 6.

Ainda tendo como referência a Fig. 5, percebe-se que parece haver uma divergência no limitante, para baixos valores de  $E_b/N_0$ . Este é um comportamento próprio do limitante de união que o torna preciso apenas para valores de  $E_b/N_0$  acima da taxa de corte do canal [Ben98a].

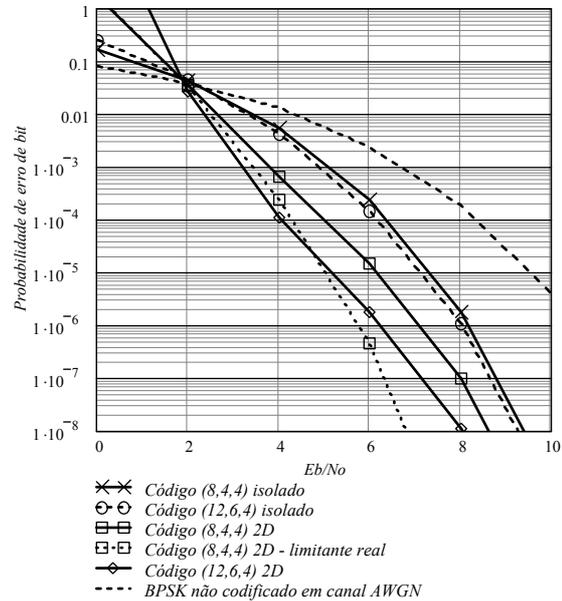


Fig. 5. Limitantes para os códigos produto  $(8,4,4)^2$  e  $(12,6,4)^2$  em canal AWGN.

A Fig. 6 mostra resultados para os códigos  $(8,4,4)$  e  $(12,6,4)$  isoladamente e para os códigos produto  $(8,4,4)^2$  e  $(12,6,4)^2$ , em canal Rayleigh plano. A probabilidade de erro de bit teórica para sinalização BPSK neste canal é também registrada para fins de comparação.

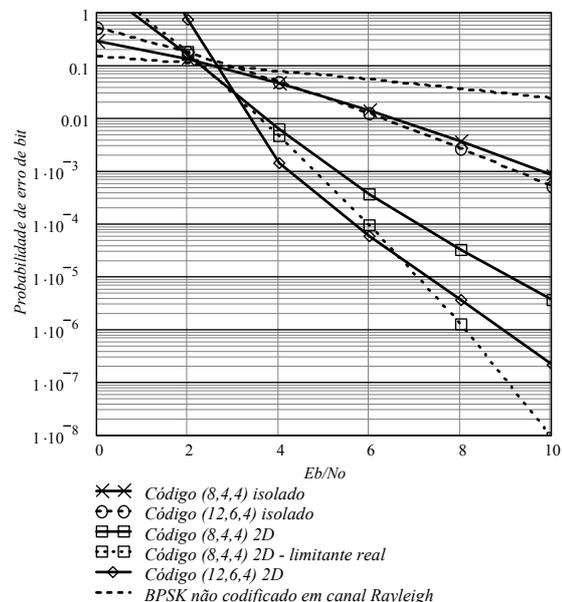


Fig. 6. Limitantes para os códigos produto  $(8,4,4)^2$  e  $(12,6,4)^2$  em canal Rayleigh.

Assim como para o canal AWGN, nota-se na Fig. 6 que o aumento do comprimento dos códigos isolados de 8 para 12 bits não demonstrou significativas melhorias. Já para os códigos produto bidimensionais

(2D) com componentes (12,6,4) os limitantes se encontram em patamares mais reduzidos em relação àqueles com componentes (8,4,4), sendo que o código (12,6,4)<sup>2</sup> indica potenciais de ganhos de codificação maiores que 6,5 dB para valores de taxa de erro de bit menores que  $2 \times 10^{-2}$ .

A Fig. 7 mostra resultados da análise de limitantes para os códigos (8,4,4) e (12,6,4) isoladamente e para os códigos produto (8,4,4)<sup>3</sup> e (12,6,4)<sup>3</sup>, em canal AWGN. A probabilidade de erro de bit teórica para sinalização BPSK neste canal é também registrada para fins de comparação. Nota-se nesta figura que para os códigos produto tridimensionais (3D) com componentes (12,6,4), os limitantes se mostraram cerca de 1,8 dB mais reduzidos, em relação àqueles com componentes (8,4,4), sendo que o código (12,6,4)<sup>3</sup> apresenta potenciais de ganhos de codificação maiores que 8 dB para valores de taxa de erro de bit menores que  $10^{-4}$ .

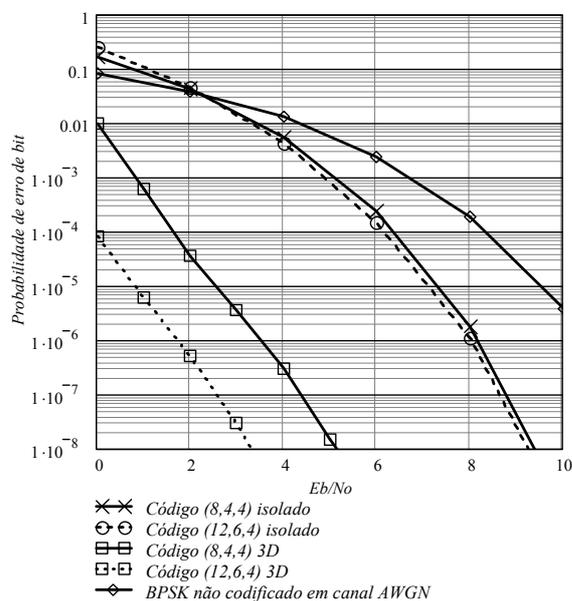


Fig. 7. Limitantes para os códigos produto (8,4,4)<sup>3</sup> e (12,6,4)<sup>3</sup> em canal AWGN.

Por fim, na Fig. 8 são registrados resultados da análise de limitantes para os códigos (8,4,4) e (12,6,4) isoladamente e para os códigos produto (8,4,4)<sup>3</sup> e (12,6,4)<sup>3</sup> em canal Rayleigh. A probabilidade de erro de bit teórica para sinalização BPSK neste canal é também registrada para fins de comparação. Nota-se nesta figura que para os códigos produto tridimensionais (3D) com componentes (12,6,4) os limitantes se mostraram cerca de 1 dB mais reduzidos, em relação àqueles com componentes (8,4,4), sendo que o código (12,6,4)<sup>3</sup> apresenta potenciais de ganhos de codificação maiores que 11 dB para valores de taxa de erro de bit menores  $2 \times 10^{-2}$ , em relação à sinalização BPSK sem codificação.

V. SUMÁRIO E COMENTÁRIOS FINAIS

Este artigo apresentou alguns resultados da investigação sobre limitantes superiores de probabilidade de erro de bit para uma classe de

códigos produto de dimensão  $D$ , comprimento  $n^D$ , taxa  $(1/2)^D$  e distância mínima  $4^D$ , formada por códigos componentes  $(n, n/2, 4)$  construídos segundo a regra de concatenação generalizada. A classe de códigos em questão apresenta baixa complexidade de implementação e os resultados fornecidos nesse artigo indicaram que tal classe de códigos tem potencial para elevados ganhos de codificação tanto para canais AWGN quanto para canais com desvanecimento Rayleigh. O método de análise de limitantes foi revisado e algumas sugestões que almejam facilitar a sua implementação computacional foram ainda apresentadas.

Torna-se importante ressaltar que os potenciais ganhos de desempenho sinalizados pela análise de limitantes apresentada somente podem ser alcançados para esquemas de decodificação ótima de máxima verossimilhança. E sabe-se que a complexidade de tais esquemas é exponencialmente crescente em  $n$ , o comprimento total do código. Portanto, a construção de algoritmos de decodificação sub-ótimos que procurem aproximar o desempenho real do esquema de codificação aqui considerado dos patamares regidos pelos limitantes superiores de probabilidade de erro de bit representa um desafio e uma oportunidade para pesquisas futuras. Em [Gui03] é sugerido um esquema de decodificação para a classe de códigos aqui investigada, e os limitantes são lá utilizados para avaliação da performance de tal esquema, em termos da maior ou menor proximidade de uma decodificação de máxima verossimilhança. Neste esquema, um simples algoritmo de decodificação de distância mínima é inserido em um processo de decodificação turbo.

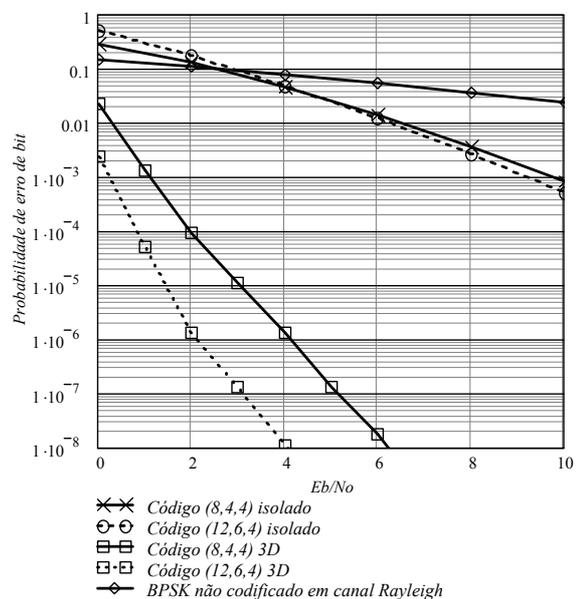


Fig. 8. Limitantes para os códigos produto (8,4,4)<sup>3</sup> e (12,6,4)<sup>3</sup> em canal Rayleigh.

VI. REFERÊNCIAS

[Ben96] BENEDETTO, S., G. MONTORSI. **Unveiling Turbo Codes: Some Results on Parallel Concatenated Coding Schemes.** IEEE

- Trans. on Inf. Theory, vol. 42, no. 2, pp. 409-428. March/1996.
- [Ben98a] BENEDETTO, S., D. DIVSALAR, G. MONTORSI and F. POLLARA. **Analysis, Design, and Iterative Decoding of Double Serially Concatenated Codes with Interleavers**. IEEE J.S.A.C., vol. 16, no. 2, pp. 231-244, February/1998.
- [Ben98b] BENEDETTO, S., D. DIVSALAR, G. MONTORSI & F. POLLARA. **Serial Concatenation of Interleaved Codes: Performance Analysis, Design and Iterative Decoding**. IEEE Trans. on Inf. Theory, vol. 44, no. 3, pp. 909-926, May/1998.
- [Ben99] BENEDETTO, S. & E. BIGLIERI. **Principals of Digital Transmission With Wireless Applications**. Kluwer / Plenum: New York, 1999.
- [Bos00] BOSSERT, Martin. **Channel-Coding for Telecommunications**, John Wiley & Sons: London, England, 2000.
- [Gui03] GUIMARÃES, Dayani Adionel, **Tese de Doutorado**, Universidade Estadual de Campinas – Unicamp, SP, junho/2003.
- [Hal96] HALL, Erik K. **Performance and Design of Turbo Codes on Rayleigh Fading Channels**. M.Sc. Thesis, University of Virginia, May/1996.
- [Hal98] HALL, E. K. & S. G. WILSON. **Design and Analysis of Turbo Codes on Rayleigh Fading Channels**. IEEE J.S.A.C., vol. 16, no. 2, pp. 160-174, February/1998.
- [Her99] HERZOG, R. & C. WEIß. **Improved Tight Performance Bounds on Concatenated Codes**, Globecom'99, vol. 5, pp. 2427-2431, 1999.
- [Hon97] HONARY, B., **Trellis Decoding of Block Codes**. Kluwer Academic Publishers: Norwell, Massachusetts, USA, 1997.
- [Kas97] KASAMI, T., K. YAMASHITA, T. FUJIWARA & S. LIN. **On bit-error probability of a concatenated coding scheme**, IEEE Trans. on Comm., vol. 45, no. 5, pp. 536-543, May/1997.
- [Ran01] RANKIN, David M., **Single Parity Check Product Codes and Iterative Decoding**. Ph.D. Thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, May/2001.

#### SOBRE O AUTOR

**Dayan Adionel Guimarães** nasceu em Carrancas, MG, em 01 de março de 1969. Possui os títulos: *Técnico em Eletrônica* (ETE “FMC”, 1987), *Engenheiro Eletricista* (Inatel, 1994), *Especialista em Engenharia de Comunicação de Dados* (Inatel, 2003), *Especialista em Administração* com ênfase em Gerência de RH (FAI, 1996), *Mestre em Engenharia Elétrica* (Unicamp, 1998) e *Doutor em Engenharia Elétrica* (Unicamp, 2003). De 1988 a 1993 desenvolveu sensores e equipamentos para instrumentação industrial e controle e também foi Supervisor de Produção e Supervisor de Engenharia de Produtos na SENSE Sensores e Instrumentos. Desde de janeiro de 1995 é Professor do Inatel onde, por oito anos, foi responsável pela estrutura que dá apoio às atividades de ensino prático nas áreas de Telecomunicações, Eletrônica e Eletrotécnica. É membro do IEEE e editor da área de comunicações móveis para a revista *Telecomunicações* do Inatel. Suas pesquisas incluem aspectos gerais sobre transmissão digital e sistemas de comunicação móvel, especificamente sistemas CDMA Multiportadora e esquemas de codificação para canais com desvanecimento, especificamente códigos turbo de bloco.