

# Utilização do Método FDFD para a Análise dos Modos TM, Propagantes em Estruturas Periódicas 2-D

Paulo A. dos S. Ramalho e Carlos L. da S.S. Sobrinho

Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação (DEEC) - Universidade Federal do Pará (UFPA)  
Laboratório de Análise Numérica em Eletromagnetismo (LANE) - Universidade Federal do Pará (UFPA)  
Belém, PA, Brasil 66075-900

**Resumo** — Na formulação desenvolvida neste trabalho, parte-se das equações de Maxwell no domínio da frequência, e então obtém-se a equação de onda que rege a propagação dos modos TM em estruturas periódicas bidimensionais com anisotropia biaxial. Esta equação é então solucionada numericamente através método das diferenças finitas no domínio da frequência (método FDFD). Visto que tal solução resulta vantajosamente em um problema de autovalores convencional, onde a matriz característica é esparsa, torna-se bastante vantajosa, a solução computacional do problema. No entanto, para garantir a eliminação dos modos espúrios, problema que se verifica em muitas formulações, é imposta, nesta solução, a condição do divergente do vetor indução magnética igual a zero. O objetivo principal deste trabalho é estabelecer uma relação de dependência entre as características de propagação para estruturas periódicas bidimensionais, e as suas características geométricas.

**Palavras Chave** – Estruturas Periódicas, método FDFD, modo TM.

## I. INTRODUÇÃO

Durante as últimas décadas, o estudo de estruturas periódicas sob o ponto de vista da propagação de ondas vem alcançando uma grande importância em diversas áreas do conhecimento, tais como, a acústica, a sismologia e a área das comunicações ópticas. Onde nesta última, tais estruturas são conhecidas como Cristais Fotônicos.

Os cristais fotônicos consistem de dielétricos organizados de forma periódica no espaço, visto que, devido a esta periodicidade, é possível o controle da propagação da luz ao longo de sua estrutura, haja vista que, em determinadas faixas de frequências, chamadas de PBG (*Photonic Band Gap*) [1], não há propagação das ondas eletromagnéticas na estrutura do cristal.

Os cristais fotônicos podem ser empregados na fabricação de cavidades ópticas [2]-[3], e também em guias e filtros ópticos. Estes materiais, são aplicados também, como isolamento entre as portas Tx e Rx em antenas de microfita [4], e são empregados ainda, como refletor parabólicos em antenas diretivas [5].

Na formulação apresentada neste trabalho, foi utilizado de forma eficiente o método FDFD [6,7] na análise da propagação dos modos TM em estruturas periódicas constituídas de materiais com anisotropia biaxial. A solução numérica através deste método, resulta

em um problema convencional de autovalores, onde a matriz característica é esparsa e somente os valores nulos precisam ser armazenados. Apesar da formulação ser bastante abrangente, somente exemplos, considerando-se materiais isotrópicos foram considerados, neste trabalho.

## II. TEORIA

Será mostrado agora, de forma clara e objetiva, o equacionamento para a obtenção da equação matricial que define o problema de autovalores, sendo que estes últimos, representam as frequências dos modos propagantes nas estruturas dos cristais bidimensionais, os quais se quer analisar. A fim de alcançar tal objetivo, parte-se das equações de Maxwell no domínio da frequência, e aplica-se o método das diferenças finitas (FDFD) [6,7], com o intuito de aproximar as derivadas parciais das equações por diferenças centradas, desta maneira facilitando o manejo matemático desta formulação. Este procedimento pode ser efetuado para dois tipos possíveis de propagação, que são: os modos transversais de propagação (modos TE e TM) e os modos de propagação oblíqua ao eixo da estrutura (os modos híbridos), como já explanado em trabalhos anteriores [6-8], no entanto, este trabalho trata somente do modo transversal TM.

Vale frisar que, quando se obtêm as curvas de dispersão, torna-se possível determinar as características das bandas proibidas (caso existam, frequência central e largura de banda) com relação a variação dos parâmetros eletromagnéticos da estrutura sob análise.

### II.1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considere uma estrutura, com uniformidade segundo a direção longitudinal, e periódica nas direções transversais a esta. Define-se a direção longitudinal como a direção do eixo Z (fig. 1(a)). Sendo a e b o comprimento dos vetores independentes da rede cristalina, os quais formam a rede primária e apontam nas direções x e y, respectivamente. Esta rede representa toda a estrutura periódica do cristal bidimensional. Sendo que a seção transversal deste cristal é mostrada na fig. 1(b).

Nota-se que, a área da figura dentro de uma célula se repete segundo as direções dos vetores de treliça. Essa figura nada mais é, do que o perfil de permissividade elétrica dentro da rede cristalina. Este perfil pode ser tanto isotrópico quanto anisotrópico, podendo ser, ainda, gradual ou em degraus segundo as direções dos vetores a

e b, contudo sendo uniforme segundo a direção z. Na formulação desenvolvida neste trabalho, os meios foram considerados não magnéticos ( $\mu = \mu_o$ ) e com anisotropia biaxial.

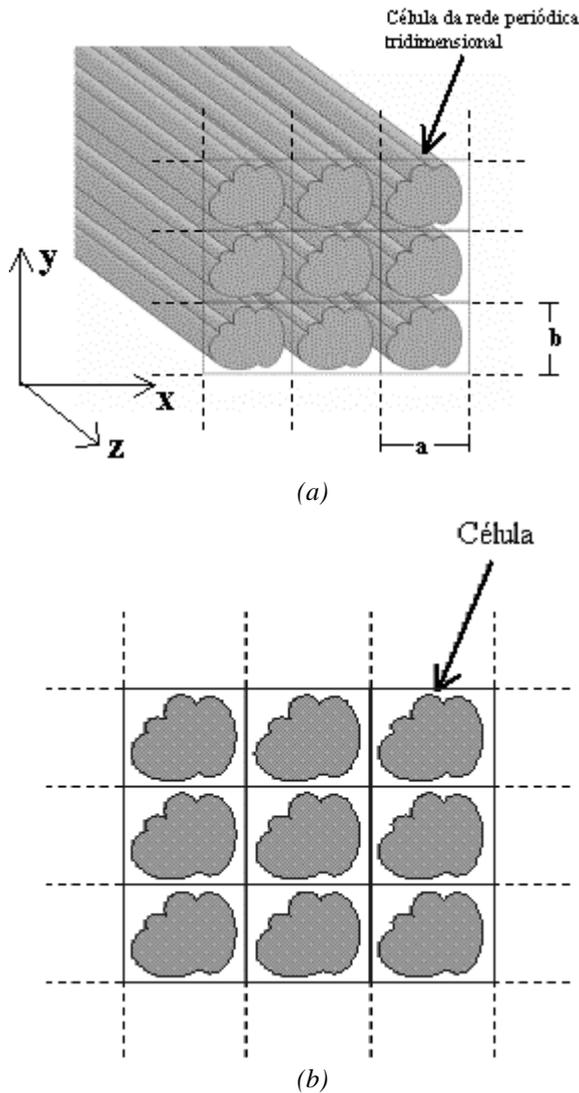


Figura 1. Estrutura periódica dielétrica bidimensional e anisotrópica. (a) Visualização tridimensional. (b) Seção transversal.

Depois de descrever as características do cristal, o passo seguinte é encontrar a equação de onda que rege a propagação em tais estruturas periódicas e, então, resolvê-la numericamente mediante o uso do método FDFD. E é isso que é feito nas seções posteriores.

**II.2. CARACTERIZAÇÃO DOS MODOS PROPAGANTES TM PARA O CRISTAL FOTÔNICO BIDIMENSIONAL**

Para as estruturas estudadas neste trabalho, considera-se que o meio é não-magnético e os campos têm dependência harmônica no tempo da forma  $exp(j\omega t)$ , onde  $\omega = 2\pi f$ , definida como sendo a frequência angular. Deste modo, deve-se representar as equações de Maxwell no domínio da frequência [9] nas formas

$$\nabla \times \bar{E} = -j\omega \mu_o \bar{H} \tag{1}$$

$$\nabla \times \bar{H} = j\omega [\epsilon] \bar{E} \tag{2}$$

$$\nabla \cdot ([\epsilon] \bar{E}) = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \cdot (\mu_o \bar{H}) = 0 \tag{4}$$

onde  $\bar{E}$  é o vetor intensidade de campo elétrico,  $\bar{H}$  é o vetor intensidade de campo magnético e  $[\epsilon]$  é o tensor permissividade. Considerando que as estruturas analisadas, como outrora foi dito, possuem permissividade anisotrópica biaxial, logo para um sistema de eixos de coordenadas coincidentes com o sistema de eixos óticos do cristal,  $[\epsilon]$  deve ser definido como:

$$[\epsilon] = \epsilon_o \begin{bmatrix} \epsilon_x(\bar{r}) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y(\bar{r}) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z(\bar{r}) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

considerando que  $\epsilon_o$  é a permissividade do espaço livre e que  $\bar{r} = x \hat{i} + y \hat{j}$  é o vetor posição, logo, devido a periodicidade, tem-se que:

$$\epsilon_i(\bar{r} + m\bar{p}_1 + n\bar{p}_2) = \epsilon_i(\bar{r}); \quad i = x, y, z, \tag{6}$$

onde m e n são inteiros arbitrários,  $\bar{p}_1$  e  $\bar{p}_2$  são os vetores primitivos da rede cristalina primária, com  $\|\bar{p}_1\| = a$  e  $\|\bar{p}_2\| = b$ , e  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  são as permissividades relativas efetivas em relação aos eixos x, y e z, respectivamente.

O problema analisado neste trabalho, considera que ao longo da direção z, a propagação é da forma  $e^{-\gamma_z z}$ , onde  $\gamma_z$  é a constante de propagação, então as equações (1)-(4) ficam na forma matricial

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \frac{j}{\omega \mu_o} \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma_z E_y \\ -\gamma_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega \epsilon_o} \begin{bmatrix} \epsilon_x^{-1}(\bar{r}) \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma_z H_y \right) \\ \epsilon_y^{-1}(\bar{r}) \left( -\gamma_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\ \epsilon_z^{-1}(\bar{r}) \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \epsilon_x(\bar{r}) E_x}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_y(\bar{r}) E_y}{\partial y} - \gamma_z \epsilon_z(\bar{r}) E_z = 0, \tag{9}$$

$$\mu_o \left( \frac{\partial H_x}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial y} - \gamma_z H_z \right) = 0. \tag{10}$$

É freqüente, considerarem-se os casos de propagação oblíqua e transversal, na análise dos modos propagantes, porém, como já citado anteriormente, será considerado no trabalho apenas o caso de propagação transversal TM, na análise dos modos propagantes. A propagação transversal, é onde se analisa os modos que possuem  $\gamma_z = 0$  e que podem ser separados em modos TE e TM (fig. 2(a)), a qual já é diferente da propagação oblíqua, que é aquela onde deseja-se determinar as características de dispersão dos modos que possuem  $\gamma_z \neq 0$  e que têm a característica de serem modos híbridos (fig. 2(b)).

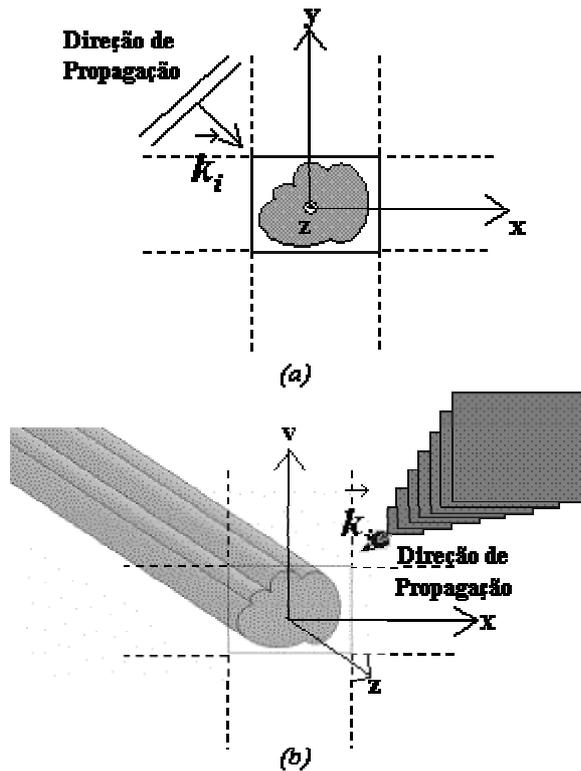


Figura 2. Esquemas de propagação para uma célula. (a) Transversal. (b) Oblíqua.

Na propagação transversal, a componente  $E_z$  é utilizada para a obtenção dos modos TM e a componente  $H_z$  é utilizada para a obtenção dos modos TE. No caso da propagação oblíqua, a formulação pode ser desenvolvida através das componentes transversais  $H_x$  e  $H_y$  do campo magnético, pois neste caso, quando é realizada a inclusão da condição de divergente do campo magnético (ou através das correspondentes do campo elétrico) igual a zero ( $\nabla \cdot (\mu_o \vec{H}) = 0$ ), contorna-se o problema dos modos espúrios.

**Propagação Transversal TM.**

No caso da propagação transversal, quando  $\gamma_z = 0$ , os modos podem ser separados em TE e TM., A formulação para este caso torna-se mais simples, pois é feita usando apenas uma componente de campo.

Considerando o modo TM, tem-se que  $\gamma_z = 0$  e  $H_z = 0$ . Desta forma, das equações (7) e (8) obtêm-se:

$$E_x = 0, \tag{11}$$

$$E_y = 0, \tag{12}$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\epsilon_0\epsilon_z} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \tag{13}$$

$$H_x = \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \tag{14}$$

$$H_y = -\frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{15}$$

Substituindo (14) e (15) em (13), resulta em

$$j\omega\epsilon_0\epsilon_z E_z = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right),$$

ou

$$k_0^2 \epsilon_z E_z + \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = 0, \tag{16}$$

onde,  $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ , é o numero de onda do espaço livre. Em (16), tem-se a equação de onda que define a propagação dos modos TM, para  $E_z$ . Deve-se notar que como  $\gamma_z = 0$ , a condição  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$  é garantida. Para provar isso basta observar de (14) e (15) que  $\frac{\partial H_x}{\partial x} = -\frac{\partial H_y}{\partial y}$ . Desta maneira, os modos espúrios são evitados.

Na formulação de problemas que envolvem periodicidade, de forma geral usa-se como ponto inicial, o teorema de Floquet [10,11]. Sendo que o mesmo, quando aplicado ao problema em análise, implica na condição de contorno,

$$V(x+a, y+b) = e^{-j\beta_x a - j\beta_y b} V(x, y), \tag{17}$$

onde  $V(x, y) = V(\vec{r})$  é qualquer componente de campo e,  $\beta_x$  e  $\beta_y$  são as constantes de fase nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Portanto, a fim de que este problema possa ser resolvido a partir de uma única célula da estrutura, a expressão (17) deve ser aplicada, então, para a componente  $E_z$ , tem-se:

$$E_z \Big|_{x=a} = E_z \Big|_{x=0} e^{-j\beta_x a}, \tag{18}$$

$$E_z \Big|_{y=b} = E_z \Big|_{y=0} e^{-j\beta_y b}, \tag{19}$$

Tal condição garante que, todo vetor de onda fora da zona irredutível de Brillouin será refletido automaticamente, através de translação, para um vetor equivalente dentro da mesma.

**A – A aplicação do método FDFD na solução numérica da equação (16)**

Agora será empregado o método das diferenças finitas no domínio da frequência na solução da equação (16). Neste caso, considera-se a seção transversal de uma única célula da estrutura periódica com visto na fig. 3(a). No entanto, a solução aproximada considera a mesma célula definida através de uma malha gradual de pontos, como mostrado na fig. 3(b). Após o que, pode-se destacar um único ponto desta malha, o que é feito através da célula gradual dos cinco pontos (fig. 4), que é tomada como base para a obtenção da solução numérica da equação (16).

Expandindo a componente  $E_z$  em série de Taylor, ao redor do ponto P, obtêm-se as derivadas de segunda ordem, sendo que o ponto P tem como vizinhos, os pontos N, S, E e W, apresentados na fig. 4. Assim, as derivadas de segunda ordem são obtidas de forma aproximada, o que é feito pelo truncamento das séries até os termos com o quadrado da distância, e também pela substituição da componente  $E_z$  por  $E$ , como segue:

$$E_{N_{1,4}} \cong E_P + n \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{1,4} + \frac{1}{2} n^2 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \Big|_{1,4}, \quad (20)$$

$$E_{S_{2,3}} \cong E_P - s \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{2,3} + \frac{1}{2} s^2 \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \Big|_{2,3}, \quad (21)$$

$$E_{E_{3,4}} \cong E_P + e \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{3,4} + \frac{1}{2} e^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \Big|_{3,4}, \quad (22)$$

$$E_{W_{1,2}} \cong E_P - w \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{1,2} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \Big|_{1,2}, \quad (23)$$

Nas equações de (20) a (23), os índices 1,2,3 e 4 são referentes aos respectivos meios da célula da fig. 4. Portanto, destas expressões é que se obtêm a forma aproximada das derivadas de segunda ordem, como é feito abaixo:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \Big|_{1,4} = \frac{2}{n^2} \left( E_{N_{1,4}} - E_P - n \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{1,4} \right), \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \Big|_{2,3} = \frac{2}{s^2} \left( E_{S_{2,3}} - E_P + s \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_{2,3} \right), \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \Big|_{3,4} = \frac{2}{e^2} \left( E_{E_{3,4}} - E_P - e \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{3,4} \right), \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \Big|_{1,2} = \frac{2}{w^2} \left( E_{W_{1,2}} - E_P + w \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{1,2} \right), \quad (27)$$

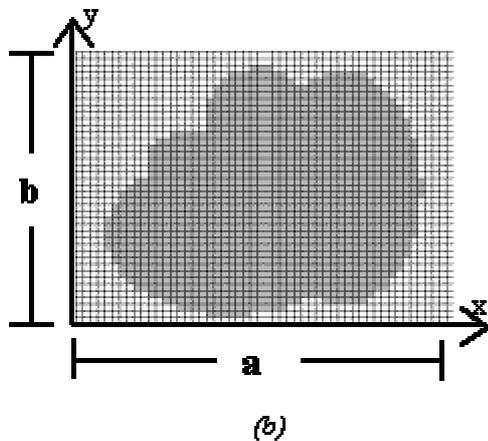
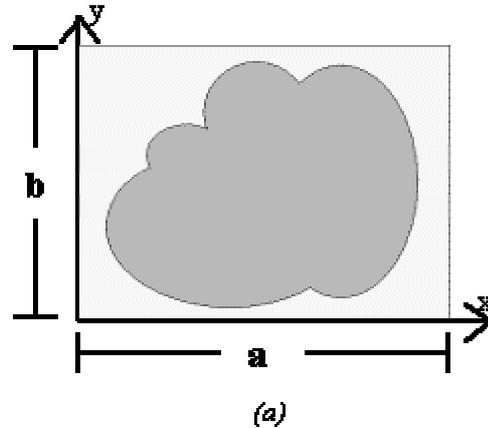


Figura 3. (a) Célula da rede sob análise. (b) A célula discretizada.

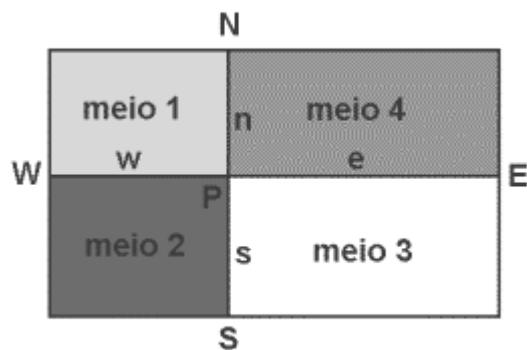


Figura 4. Célula gradual dos cinco pontos

Aplicando (16) para as quatro regiões da célula gradual dos cinco pontos (fig. 4), têm-se:

$$0 = k_0^2 \epsilon_{zi} E_P + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \Big|_i + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \Big|_i, \quad (28)$$

onde o subscrito  $i$ , indica um dos quatro meios 1,2,3 ou 4. Substituindo, nesta equação, as derivadas de 2ª ordem obtidas em (24) a (27), resulta:

Para a região 1

Nesta região, a fim de se ter uma maior praticidade matemática, multiplica-se a equação (28) por  $\frac{wn}{2}$ , e desta maneira encontra-se:

$$0 = wn \frac{k_0^2}{2} \varepsilon_{z1} E_P + \frac{n}{w} \left[ E_W - E_P + w \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_1 \right] + \frac{w}{n} \left[ E_N - E_P - n \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_1 \right], \tag{29}$$

Para a região 2

Pelo mesmo motivo explicado anteriormente, multiplica-se, agora (28) por  $\frac{ws}{2}$ .

$$0 = ws \frac{k_0^2}{2} \varepsilon_{z2} E_P + \frac{s}{w} \left[ E_W - E_P + w \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_2 \right] + \frac{w}{s} \left[ E_S - E_P + s \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_2 \right], \tag{30}$$

Para a região 3

Neste caso, multiplica-se (28) por  $\frac{se}{2}$  e têm-se:

$$0 = es \frac{k_0^2}{2} \varepsilon_{z3} E_P + \frac{s}{e} \left[ E_E - E_P + e \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_3 \right] + \frac{e}{s} \left[ E_S - E_P + s \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_3 \right], \tag{31}$$

Para a região 4

Multiplica-se (28) por  $\frac{ne}{2}$ , resultando em:

$$0 = en \frac{k_0^2}{2} \varepsilon_{z4} E_P + \frac{n}{e} \left[ E_E - E_P - e \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_4 \right] + \frac{e}{n} \left[ E_N - E_P - n \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_4 \right], \tag{32}$$

Quando se somam as equações (29)-(32), resulta:

$$0 = \left\{ \frac{k_0^2}{2} [wn\varepsilon_{z1} + ws\varepsilon_{z2} + es\varepsilon_{z3} + en\varepsilon_{z4}] - \left[ \frac{n}{w} + \frac{w}{n} + \frac{s}{w} + \frac{w}{s} + \frac{e}{s} + \frac{n}{e} + \frac{e}{n} \right] \right\} E_P + \left[ \frac{n+s}{e} \right] E_E + \left[ \frac{n+s}{w} \right] E_W + \left[ \frac{w+e}{n} \right] E_N + \left[ \frac{w+e}{s} \right] E_S + Q \tag{33}$$

onde:

$$Q = n \left( \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_1 - \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_4 \right) + s \left( \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_2 - \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_3 \right) + w \left( \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_2 - \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_1 \right) + e \left( \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_3 - \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_4 \right) \tag{34}$$

**B – Condições de Contorno.**

Para que a continuidade das componentes  $H_x$  e  $H_y$ , do campo magnético seja garantida nas interfaces entre as quatro regiões da célula da fig. 4, as seguintes igualdades são obtidas de (14) e (15):

$$H_{x2} = H_{x1} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_2 = \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_1, \tag{35}$$

$$H_{x3} = H_{x4} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_3 = \frac{\partial E}{\partial y} \Big|_4, \tag{36}$$

$$H_{y1} = H_{y4} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_1 = \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_4, \tag{37}$$

$$H_{y2} = H_{y3} \rightarrow \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_2 = \frac{\partial E}{\partial x} \Big|_3, \tag{38}$$

Com as condições impostas pelas equações (35) a (38), pode-se ver perfeitamente que em (34),  $Q = 0$ . Desta forma, (33) pode ser expressa como:

$$0 = \left\{ \frac{k_0^2}{2} [wn\varepsilon_{z1} + ws\varepsilon_{z2} + es\varepsilon_{z3} + en\varepsilon_{z4}] - \left[ \frac{n}{w} + \frac{w}{n} + \frac{s}{w} + \frac{w}{s} + \frac{e}{s} + \frac{n}{e} + \frac{e}{n} \right] \right\} E_P + \left[ \frac{n+s}{e} \right] E_E + \left[ \frac{n+s}{w} \right] E_W + \left[ \frac{w+e}{n} \right] E_N + \left[ \frac{w+e}{s} \right] E_S \tag{40}$$

Todavia, para uma continuidade desta formulação, com mais clareza, é melhor expressar (40), como:

$$-k_0^2 E_P = A_P E_P + A_E E_E + A_W E_W + A_N E_N + A_S E_S, \quad (41)$$

onde:

$$A_P = -A_0 \left( \frac{n}{w} + \frac{w}{n} + \frac{s}{w} + \frac{w}{s} + \frac{s}{e} + \frac{e}{s} + \frac{n}{e} + \frac{e}{n} \right), \quad (42)$$

$$A_0 = \frac{2}{wn\epsilon_{z1} + ws\epsilon_{z2} + es\epsilon_{z3} + en\epsilon_{z4}}, \quad (43)$$

$$A_E = A_0 \left( \frac{n+s}{e} \right), \quad (44)$$

$$A_W = A_0 \left( \frac{n+s}{w} \right), \quad (45)$$

$$A_N = A_0 \left( \frac{w+e}{n} \right), \quad (46)$$

$$A_S = A_0 \left( \frac{w+e}{s} \right), \quad (47)$$

A equação (41) é a solução da equação (16) para um ponto P qualquer, da malha gradual da fig. 3(b). Ao aplicar tal equação, para todos os pontos da malha gradual, tem-se a solução geral para o problema, porém ao mesmo tempo que se faz isso, leva-se em conta, nesta generalização, as condições de contorno periódicas definidas em (18) e (19) para os pontos periféricos da malha.

Desenvolvendo a formulação para todos os pontos de uma malha gradual de  $M \times N$  pontos, obtêm-se  $(M-1) \times (N-1)$  equações, que podem ser representadas matricialmente na seguinte forma convencional de um problema de autovalores:

$$\left[ (\mathbf{A}) - \lambda^2 (\mathbf{I}) \right] (\mathbf{E}) = 0 \quad (48)$$

onde  $(\mathbf{I})$  é a matriz identidade;  $\lambda^2 = -k_0^2 = -(\omega/c)^2$  representa os autovalores, sendo  $c$  a velocidade da luz no espaço livre;

$$(\mathbf{E}) = \left( E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, \dots, E_{1,N-1}, E_{2,1}, E_{2,2}, \dots, E_{2,N-1}, \dots, E_{M-1,N-1} \right)^T$$

contêm os autovetores; e  $(\mathbf{A})$ , é uma matriz quadrada de ordem  $(M-1) \times (N-1)$ , na qual os elementos dependem dos parâmetros eletromagnéticos dos meios que constituem a estrutura e da sua geometria.

### III. RESULTADOS OBTIDOS

Nesta etapa, são mostrados os resultados obtidos na análise de várias configurações de estruturas periódicas, onde o caso isotrópico foi considerado. Foram utilizadas estruturas com geometrias uniformes ao longo da direção  $z$ , apresentando periodicidade nas direções transversais ( $x$  e  $y$ ). Neste trabalho foram realizadas análises de vários tipos de estruturas através do programa FotoTM\_esp.exe, o qual foi desenvolvido em linguagem Fortran [12]. O código foi, então, adaptado para analisar as estruturas consideradas neste trabalho.

Foram analisados 9 tipos de estruturas periódicas, sendo que as células de cada estrutura são mostradas na fig. 5. Considerando que através do programa obtêm-se uma boa convergência a partir de uma malha de 400 pontos para a estrutura mostrada na fig. 5(a), como já verificado em [8]. Neste trabalho, a convergência foi obtida para uma malha de  $33 \times 33$  pontos, para as estruturas mais complexas, pois existem geometrias consideradas que possuem círculos. Tais configurações necessitam de uma definição mais específica para os seus contornos, então esta malha passou a ser usada para todas as estruturas aqui consideradas. O programa foi executado, para todas as configurações mostradas na fig. 5, em um PC Pentium III 700 MHz com 128 MB de RAM, onde o sistema operacional *Windows 2000 professional* foi usado. Para a obtenção das características de propagação de cada estrutura, levou-se, aproximadamente, um tempo de cinco horas de processamento serial.

#### III.1. A ZONA DE BRILLOUIN

No que tange o estudo das características de propagação em cristais fotônicos, é de suma importância definir a chamada primeira zona de Brillouin [13-15]. Onde a mesma, é definida como sendo a célula primitiva de Wigner Seitz na rede cristalina recíproca tendo como localização, a origem do espaço de Fourier. A zona em questão possui valiosa importância, pois ela define a região no espaço dos vetores de onda que dão origem aos modos possíveis de propagação. Vetores de onda fora desta zona são refletidos automaticamente para um vetor equivalente dentro dela. Isso acontece devido as condições de contorno periódicas, as quais são usadas no tratamento de problemas de propagação em cristais fotônicos ou outros problemas que envolvam periodicidade.

Será visto nos resultados a seguir, que quando se analisam as características de dispersão dos modos propagantes TM nos cristais fotônicos com o valor do número de onda percorrendo o contorno da zona irreduzível de Brillouin (fig. 6), obtêm-se a largura efetiva da banda proibida de propagação.

#### III.2. APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

A seguir são apresentados os resultados obtidos para as características de propagação de cada estrutura mostrada na fig. 5 (figuras 8-16 respectivamente), considerando-se a zona irreduzível de Brillouin mostrada na fig. 6. O programa foi desenvolvido de forma que os

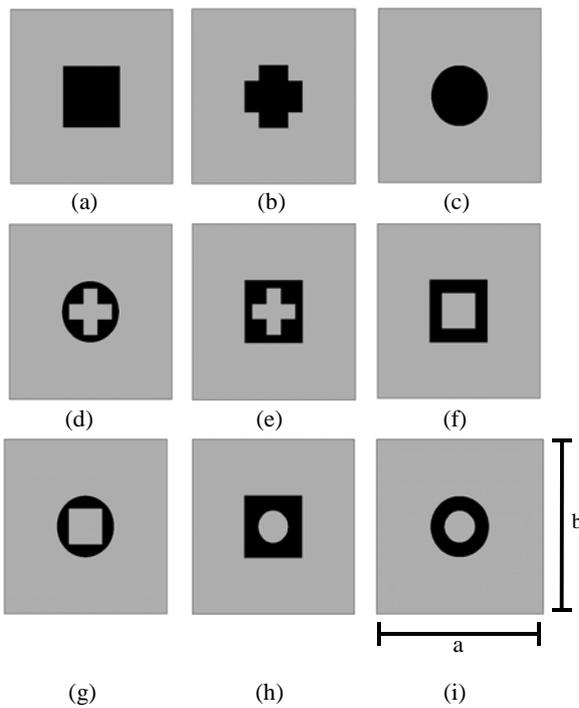


Figura 5 – Células das estruturas periódicas que foram analisadas. (a) Quadrado centrado; (b) Cruz centrada; (c) Círculo centrado; (d) Círculo centrado com orifício em forma de cruz; (e) Quadrado centrado com orifício em forma de cruz; (f) Quadrado centrado com orifício em forma de quadrado. (g) Círculo centrado com orifício em forma de quadrado. (h) Quadrado centrado com orifício circular (i) Anel centrado (rosca).

dados de saída são utilizados para caracterizar a geometria da célula de cada estrutura em análise, assim como para a obtenção das curvas de dispersão das mesmas. Vale ressaltar que os gráficos aqui mostrados foram obtidos através do *software* MATLAB 5.3 [16].

O valor de permissividade elétrica relativa da região mais escura das células é igual a ( $\epsilon_r = 8,9$ ), e no restante das mesmas igual a do espaço livre. Considera-se, assim como na formulação desenvolvida na seção anterior, os materiais utilizados como sendo não magnéticos ( $\mu = \mu_o$ ). Vale ressaltar ainda que nas curvas de dispersão, para cada caso, têm-se no eixo vertical, a frequência normalizada  $\omega a/2\pi c = a/\lambda$  e no eixo horizontal o valor do número de onda percorrendo o contorno da zona irredutível de Brillouin (Figuras 8-16).

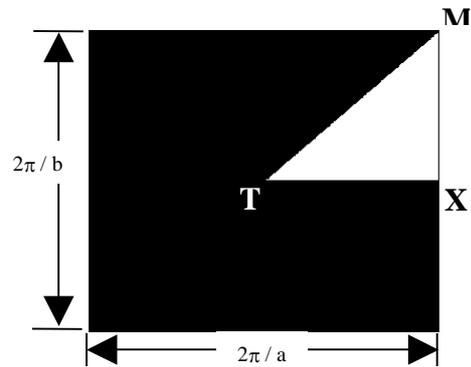


Figura 6 - Zona Irredutível de Brillouin (Região T-X-M-T).

Tabela I – Configurações geométricas da célula de cada estrutura

Estrutura	Figura	Dimensões
Quadrado centrado	5(a)	Lado = 0,3545a
Cruz centrada	5(b)	$d_A = d_B = 0,0886a$ e $L=0,3545a$
Círculo centrado	5(c)	Diâmetro = 0,3545a
Círculo centrado com orifício em forma de cruz	5(d)	Círculo externo: Diâmetro = 0,3545a Cruz interna: $d_A = d_B = 0,0443a$ e $L=0,2658a$
Quadrado centrado com orifício em forma de cruz	5(e)	Quadrado externo: Lado = 0,3545a Cruz interna: $d_A = d_B = 0,0443a$ e $L=0,2658a$
Quadrado centrado com orifício em forma de quadrado	5(f)	Quadrado externo: Lado = 0,3545a Quadrado interno: Lado = 0,2068a
Círculo centrado com orifício em forma de quadrado	5(g)	Círculo externo: Diâmetro = 0,3545a Quadrado interno: Lado = 0,2068a
Quadrado centrado com orifício circular	5(h)	Quadrado externo: Lado = 0,3545a Círculo interno: Diâmetro = 0,1772a.
Anel centrado (rosca).	5(i)	Círculo externo: Diâmetro = 0,3545a Círculo interno: Diâmetro = 0,1772a.

Tabela II – Características das Curvas de dispersão para cada estrutura

Estrutura	Faixa dos Gaps	Largura de Banda	Figura
Quadrado centrado	1º PBG - 0,3253 a 0,4417	0,1164	8
	2º PBG - 0,7787 a 0,7832	0,0045	
	3º PBG - 0,9266 a 0,9712	0,0446	
Cruz centrada	PBG - 0,3511 a 0,4660	0,0446	9
Círculo centrado	PBG - 0,3461 a 0,4643	0,1181	10
Círculo centrado com orifício em forma de cruz	1º PBG - 0,4306 a 0,4737	0,0431	11
	2º PBG - 0,8799 a 0,8904	0,0104	
Quadrado centrado com orifício em forma de cruz	1º PBG - 0,3889 a 0,4507	0,0618	12
	2º PBG - 0,8318 a 0,8646	0,0328	
	3º PBG - 0,9734 a 1,000	0,0265	
Quadrado centrado com orifício em forma de quadrado	1º PBG - 0,3966 a 0,4511	0,0546	13
	2º PBG - 0,8370 a 0,8716	0,0346	
	3º PBG - 0,9825 a 1,0291	0,0465	
Círculo centrado com orifício em forma de quadrado	1º PBG - 0,4413 a 0,4740	0,0327	14
	2º PBG - 0,8891 a 0,8946	0,0055	
Quadrado centrado com orifício circular	1º PBG - 0,3635 a 0,4450	0,0815	15
	2º PBG - 0,8010 a 0,8419	0,0409	
	3º PBG - 0,9460 a 0,9907	0,0447	
Anel centrado (rosca).	1º PBG - 0,3958 e 0,4678	0,0721	16
	2º PBG - 0,8439 e 0,8465	0,0026	

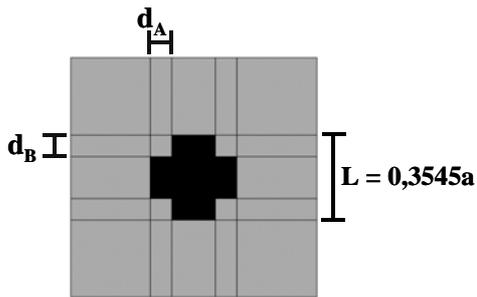


Figura 7. Parâmetros Geométricos da configuração cruz

Na tabela I são informadas as dimensões de cada estrutura analisada, bem como as figuras onde as mesmas são mostradas, onde a configuração de cruz obedece aos parâmetros expressos na figura 7.

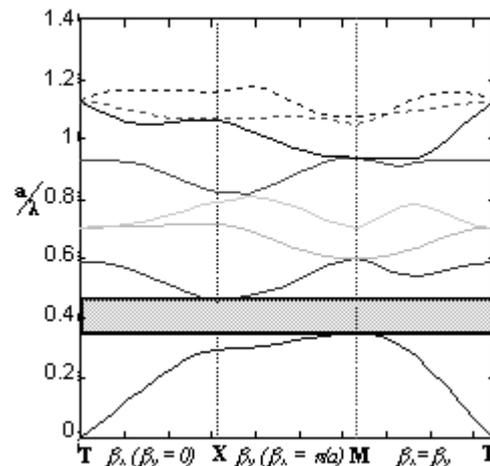


Figura 9. Características de propagação para a estrutura da Fig. 5(b).

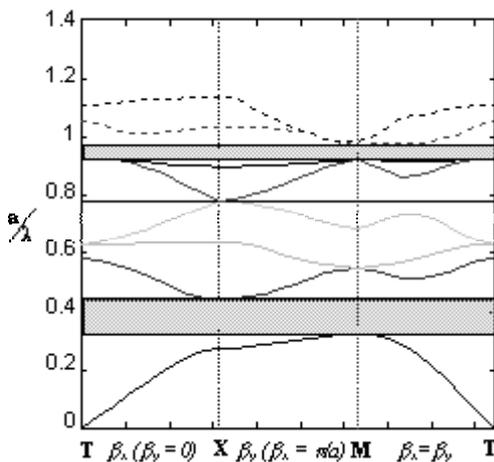


Figura 8. Características de propagação para a estrutura da Fig. 5(a)

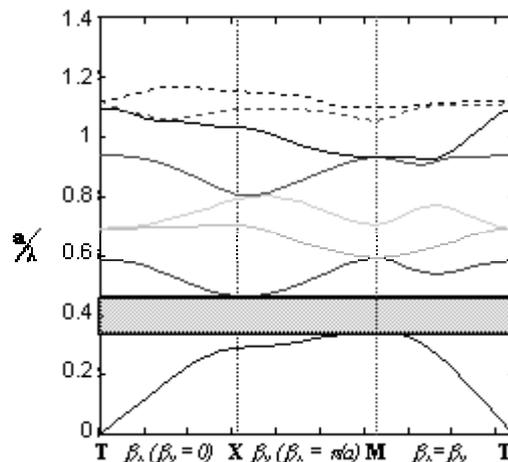


Figura 10. Características de propagação para a estrutura da Fig. 5(c).

Na tabela II, têm-se a informação sobre a faixa e a largura de banda (LB) dos *gaps* obtidos das respectivas curvas de dispersão de cada estrutura, sendo que a mesma tabela informa quais os números da figuras em que são mostradas as curvas.

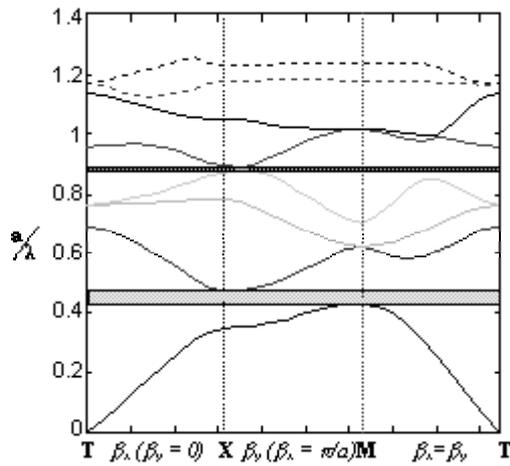


Figura 11. Características de propagação para a estrutura da Fig. 5(d).

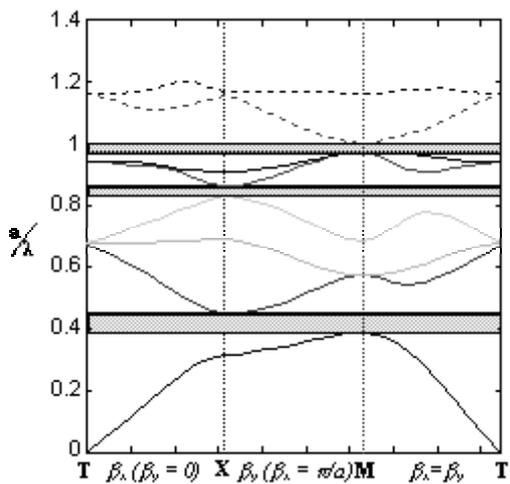


Figura 12. Características de propagação para a estrutura da Fig. 5(e).

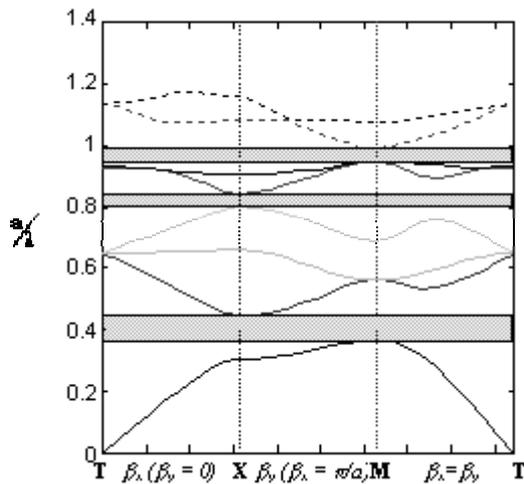


Figura 13. Características de propagação para a estrutura da Fig. 5(f).

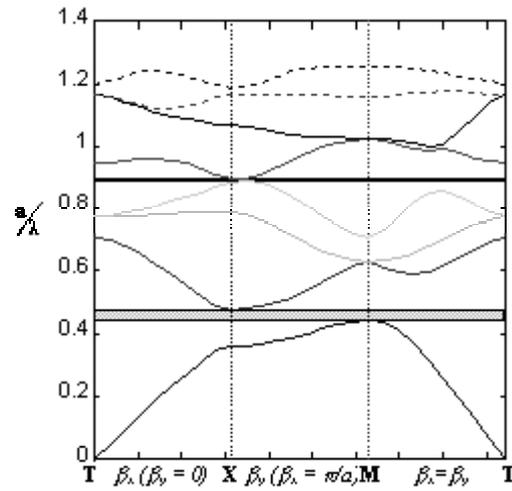


Figura 14. Características de propagação para a estrutura da Fig. 5(g).

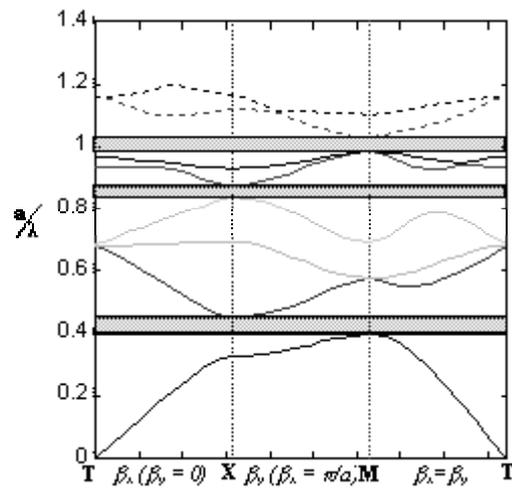


Figura 15. Características de propagação para a estrutura da Fig. 5(h).

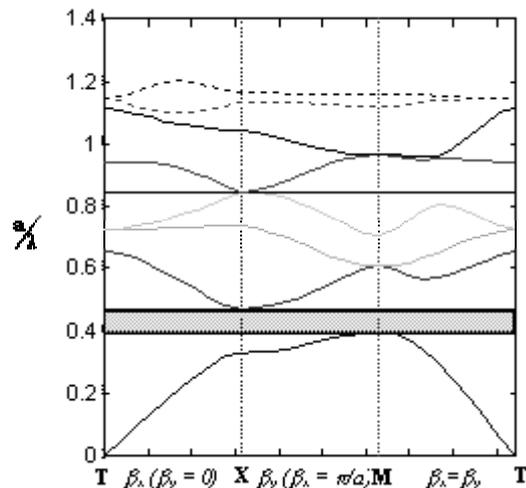


Figura 16. Características de propagação para a estrutura da Fig. 5(i).

### III. CONCLUSÕES

O método das diferenças finitas no domínio da frequência, demonstrou ser adequado para se analisar e projetar, os parâmetros de propagação de estruturas periódicas. Pois o mesmo foi empregado, com eficiência na solução numérica da equação de onda, que rege a propagação dos modos TM em estruturas periódicas bidimensionais, resultando vantajosamente em um problema de autovalores convencional, onde a matriz característica é esparsa e somente os valores diferentes de zero, da mesma, precisam ser armazenados.

As estruturas consideradas na formulação, foram investigadas de maneira que fossem encontrados *gaps* em frequências nas suas características de propagação. Sendo que existem muitos dispositivos que utilizam as vantagens destes *gaps*, tais como: guias fotônicos; antenas de alta eficiência em frequências de ondas milimétricas e de microondas; filtros seletivos em frequência (FSS); blindagem óptica; cavidades ressonantes; acopladores direcionais; etc.

O objetivo da análise aqui apresentada foi o de investigar o que acontece com as características de dispersão de estruturas periódicas bidimensionais, quando as suas formas geométricas mudam. O que foi realizado para os modos transversais TM. Assim, observam-se quais delas apresentam resultados mais satisfatórios para uma dada aplicação. No entanto, a definição de melhor ou pior resultado, depende do objetivo de projeto que se quer alcançar.

No que diz respeito à largura de banda (LB), tem-se que dentre todas as características de propagação analisadas, o círculo apresentou um PBG com maior LB do que todos os outros casos analisados. Todavia, não fica atrás, o caso da cruz centrada, onde se obteve uma LB bem pronunciada no seu único *gap*, com um valor muito próximo da LB do *gap* único do círculo centrado

Vale ressaltar que em geral, o que se procura em um projeto é uma boa largura de banda do *gap*, pois dessa forma, surgem mais opções na hora de se escolher a frequência de operação (ou comprimento de onda). Entretanto, quando se têm 3 PBGs com larguras de banda efetivas, em uma banda de análise, têm-se muito mais opções do que no caso de se ter apenas um *gap* muito largo. Portanto, deve-se considerar, que os casos das figuras 5(e), 5(f) e 5(h) apresentados aqui se saem melhores do que os 3 primeiros analisados, apesar da ótima largura de banda do PBG destes. Todavia, não se pode esquecer que os resultados apresentados aqui consideram somente a propagação dos modos TM. Portanto, para um projeto de estrutura que envolve a propagação de modos TE ou dos modos TE e TM, por exemplo, é necessário ser feito um estudo similar ao feito aqui, considerando desta vez os modos TE. Visto que para uma análise que envolva os dois tipos de propagação, deve-se fazer uma “interseção” de resultados na mesma faixa de frequência que foi analisada.

### AGRADECIMENTOS

Agradecemos todo o suporte e apoio dado pelo DEEC – Departamento de Engenharia Elétrica e de Computação e ao LANE – Laboratório de Análise Numérica em

Eletromagnetismo, ambos pertencentes a UFPA – Universidade Federal do Pará, para a realização deste trabalho. Agradecemos também, ao CNPq, que parcialmente custeou este trabalho.

### REFERÊNCIAS

- [1] J. D. Joannopoulos, R.D. Meade, and J. N. Winn, “*Photonic Crystals*”, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1995.
- [2] H. G. Park, J. K. Hwang, J. Huh, H.Y. Ryu, Y. H. Lee, J. S. Kim. “Nondegenerate monopole-mode two-dimensional photonic band gap laser”. *Appl. Phys. Lett.*, vol. 79, no. 19, pp. 3032-3034, November 2001.
- [3] M. Loncar, T. Yoshie, A. Scherer, P Gogna, Y. Qiu. “Low-threshold photonic crystal laser”. *Appl. Phys. Lett.*, vol. 81, no. 15, pp. 2680-2682, October 2002.
- [4] Y. Hao, C. G. Parini. “Isolation Enhancement of PBG Microstrip Diplexer Patch Antenna”. *IEE 11th International Conference on Antennas e Propagation*, 17-20 April 2001.
- [5] M. Thèvenot, C. Cheype, A. Reinex and Bernard Jecko. “Directive Photonic-Bandgap Antennas”. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, Vol. 47, no. 11, pp. 2115-2122, Nov. 1999.
- [6] C.L. da S.S. Sobrinho and A.J. Giarola, “Analysis of na optically controlled dielectric waveguide with the use of the FD-FD method”, *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 12, no. 6, pp. 350-353, Aug. 1996.
- [7] C.L da S.S. Sobrinho, “Método rigoroso das diferenças finitas em análise de estruturas de guias dielétricos anisotrópicos com perfil de índice de refração variável”, Tese de Doutorado, *DMO-FEE-UNICAMP*, Campinas, SP, Julho 1992.
- [8] R. V. do Espírito Santo, “Caracterização das Bandas Fotônicas para Estruturas Periódicas 2D constituídas de dielétricos anisotrópicos”. Tese de Mestrado, *UFPA/CT/PPGEE*, Belém, PA, Janeiro, 2001.
- [9] BALANIS, C. A., “*Advanced Engineering Electromagnetics*”, John Wiley Sons, New York - U.S.A., (1997).
- [10] A. Hessel, M.H. Chen, R.C. M. Li, and A.A. Oliner, “Propagation in Periodically Loaded Waveguides with Higher Symmetries”, *Proceeding of the IEEE*, vol. 61, no. 2, pp. 183-195, Fev. 1973.
- [11] Ishimaru, Akira, “*Electromagnetic Wave Propagation, Radiation and Scattering*”, Prentice Hall, 1991.
- [12] Stephen J. Chapman. “*Fortran 90/95 for Scientists and Engineers*”. First edition, WCB-McGraw-Hill: 1998, Singapore.
- [13] C. Kittel, “*Introduction Solid State Physics*”, New York: John Wiley, seventh edition, 1996.

- [14] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, “*Solid State Physics*”, Cornell University: Saunders Company, 1976.
- [15] Yuri M. Galperin, “*Introduction to Modern Solid State Physics*”, Publicação do IOFFE Educational Centre, disponível na *Internet*, através do endereço: <http://edu.ioffe.ru/lib/galperin/>. Consulta ao site – 25 de Agosto de 2001.
- [16] . Hanselman, B. Littlefield. “*MATLAB 5 - versão do estudante, Guia do Usuário*”. Markron Books: 1999, São Paulo, SP.

**Carlos Leonidas da Silva Souza Sobrinho** realizou a graduação em engenharia elétrica pela Universidade Federal do Pará (UFPA), em 1981. Obteve o título de Mestre, em 1989, pela Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ), o grau de Doutor pela Universidade de Campinas

(UNICAMP), em 1992 e, posteriormente, participou do programa de pós-doutorado no Queen Mary Westfield – University of London, 1999. É professor do departamento de engenharia elétrica da UFPA desde 1986. Atualmente desenvolve pesquisas em: espalhamento eletromagnético e guias de ondas dielétricos com aplicação em bandas de frequências ópticas e milimétricas, antenas, processamento paralelo, técnicas numéricas, sistemas de aterramento e propagação indoor e outdoor.

**Paulo André dos Santos Ramalho** realizou a graduação em engenharia elétrica pela Universidade Federal do Pará (UFPA), em 2003. É aluno do Mestrado do PPGEE da UFPA. Atualmente, faz parte do Laboratório de Análise Numérica em Eletromagnetismo (LANE), desenvolvendo pesquisas na área de Estruturas periódicas constituídas de materiais dielétricos, analisando-as, através de uma nova formulação, usando o método FDFD-VETORIAL.