

**Aluno(a):** \_\_\_\_\_

Prova com consulta ao livro texto (sem consulta ao material sobre sensoriamento espectral, exceto a um formulário), com duração de **2h e 30 min**. A interpretação é parte integrante das questões. É permitido somente o uso de calculadora científica simples. Seja organizado. Boa prova!

**1ª questão (30 pontos)**

Um sistema com modulação BFSK com detecção coerente tem em seu receptor um circuito de extração de sincronismo de portadora imperfeito que gera as funções base com defasagem  $\theta$  em relação às portadoras do sinal recebido. Tal defasagem é uma variável aleatória uniformemente distribuída em  $(-\theta_{\max}, \theta_{\max}]$  e é aproximadamente constante durante um intervalo de símbolo.

a) Determine os valores de saída dos correlatores na ausência de ruído. Admita que as frequências dos tons BFSK sejam múltiplas inteiras de  $1/T_b$  e que a separação entre elas seja de  $1/T_b$  Hz.

**Solução**

Na ausência de ruído, admitindo que o sinal  $s_1(t)$  tenha sido transmitido, teremos

$$s_{11} = \int_0^{T_b} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t) \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t + \theta) dt.$$

Utilizando a identidade (A.6),  $s_{11} = \frac{2}{T_b} \sqrt{E_b} \int_0^{T_b} \frac{1}{2} [\cos \theta + \cos(4\pi f_1 t + \theta)] dt = \sqrt{E_b} \cos \theta.$

$$s_{12} = \int_0^{T_b} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t) \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t + \theta) dt = 0 \text{ de acordo com (6.154).}$$

Por analogia,  $s_{21} = 0$  e  $s_{22} = \sqrt{E_b} \cos \theta.$

b) Determine a expressão de probabilidade de erro de símbolo média para esse sistema, em função de  $E_b/N_0$ , no canal com desvanecimento Rayleigh plano, lento e com ganho médio de potência unitário. Não é necessário simplificar a expressão obtida (basta escrevê-la na forma de integral).

**Solução**

Aplicando a expressão de  $P_e$  para a modulação BFSK no canal Rayleigh, (6.208), com  $\Gamma = E(\alpha^2)E_b'/N_0 = E_b \cos^2 \theta / N_0$ , obtém-se

$$P_e(\theta) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{E_b \cos^2 \theta / 2N_0}{1 + E_b \cos^2 \theta / 2N_0}} \right]. \text{ Como } f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta_{\max}}, & -\theta_{\max} < \theta \leq \theta_{\max} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \text{ tem-se que}$$

$$P_e = \frac{1}{4\theta_{\max}} \int_{-\theta_{\max}}^{\theta_{\max}} \left[ 1 - \sqrt{\frac{E_b \cos^2 \theta / 2N_0}{1 + E_b \cos^2 \theta / 2N_0}} \right] d\theta.$$

## 2ª questão (30 pontos)

a) Reescrever a expressão exata de  $P_e$  para a modulação MFSK com detecção coerente a partir da expressão de  $P_c(m_i)$  dada em (6.100), porém fazendo  $Z = N_i$ .

### Solução

Se  $Z = N_i$ ,  $\text{var}(Z) = N_0/2$  e  $P_e$  será dada por

$$P_e = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \text{erfc} \left( -\frac{z}{\sqrt{N_0}} - \sqrt{\frac{E}{N_0}} \right) \right]^{M-1} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left( -\frac{z^2}{N_0} \right) dz.$$

b) Explique como você faria para traçar a curva de  $P_e$  versus  $E_b/N_0$  utilizando a nova expressão deduzida, já que ela agora não está explicitamente escrita somente em função da variável  $E_b/N_0$ , mas também em função da variável  $N_0$ . Reescreva a expressão de  $P_e(E_b/N_0)$  que você utilizaria para traçar tal curva.

### Solução

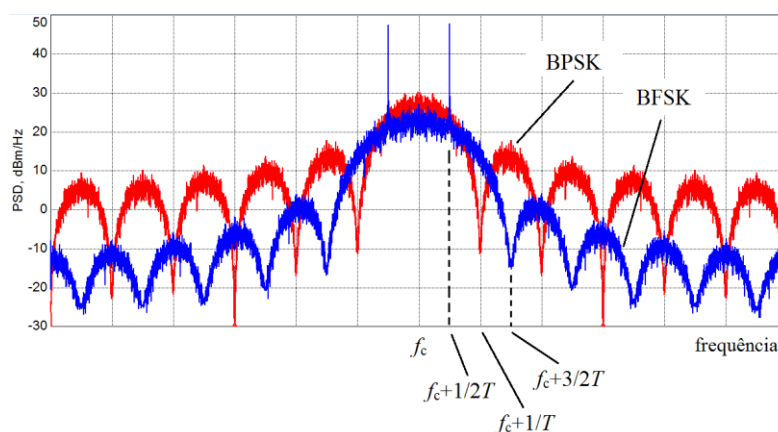
Basta escrever  $E$  em função de  $E_b$  e arbitrar qualquer valor para  $N_0$ , por exemplo  $N_0 = 1$ , resultando em:

$$P_e(E_b/N_0) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \text{erfc} \left( -z - \sqrt{\log_2 M \frac{E_b}{N_0}} \right) \right]^{M-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) dz.$$

## 3ª questão (15 pontos)

Esboçar a densidade espectral de potência de um sinal BPSK sobre aquela referente ao um sinal BFSK, supondo que ambos tenham a mesma potência média e operem com a mesma taxa de bits e mesma frequência de portadora. Admita que a separação entre os tons BFSK seja igual à taxa de símbolos. Explicar o raciocínio utilizado para fazer este esboço e comentar sobre tais densidades de forma comparativa. Identificar as principais frequências na escala.

### Solução



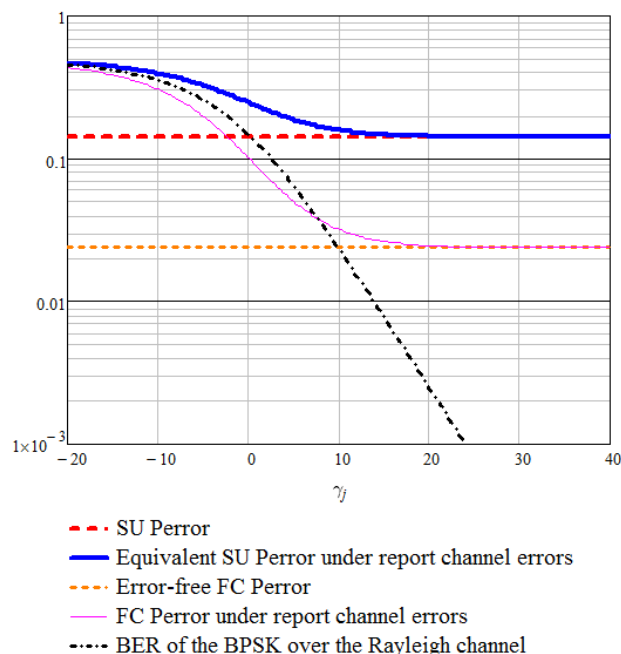
Nota-se que a largura de faixa do lóbulo principal do sinal BFSK é maior que do sinal BPSK. No entanto, a queda da densidade espectral de potência à medida que a frequência se distancia da portadora é mais abrupta no sinal BFSK que no sinal BPSK, significando que um sinal BFSK filtrado é potencialmente menos interferente em canais adjacentes do que um sinal BPSK filtrado, admitindo filtros com características similares (exceto a banda, obviamente). A queda mais abrupta do espectro BPSK é consequência da ausência de transições de fase abruptas, caso que ocorre no sinal BPSK. **Obs:** a comparação entre as densidades espectrais de

potência dessas modulações, dadas respectivamente pelas equações (6.90) e (6.15), também permite justificar a queda mais acentuada da densidade do sinal BFSK, devido à presença de termos em  $f^4$  no denominador da densidade do sinal BFSK.

#### 4ª questão (25 pontos)

Na figura a seguir há cinco curvas em função da razão sinal-ruído ( $\gamma$ ) do canal de reporte em um sistema de sensoriamento espectral cooperativo, centralizado e com fusão de decisões. Dessas curvas, uma é de probabilidade de erro de bit e quatro são de probabilidade de erro de decisão mínima, esta última obtida para  $P_{\gamma_{h0}} = P_{\gamma_{h1}} = 1/2$ . Tais curvas são assim identificadas:

1. SU  $P_{\text{error}}$ : é a probabilidade de erro de decisão mínima calculada nos SUs.
2. Equivalent SU  $P_{\text{error}}$  under report channel errors: é a probabilidade de erro de decisão mínima dos SUs "do ponto de vista" do FC.
3. Error-free FC  $P_{\text{error}}$ : é a probabilidade de erro de decisão no FC sem erros no canal de reporte.
4. FC  $P_{\text{error}}$  under report channel errors: é a probabilidade de erro de decisão global tomada no FC sobre o estado de ocupação da banda sensoriada, levando em conta erros no canal de reporte.
5. BER of the BPSK over the Rayleigh channel: é a  $P_b$  definida na equação (14) do texto sobre sensoriamento espectral.



a) Por que a curva 1 é uma constante?

**Resposta:** Ela é constante, pois independe do canal de reporte, aquele entre os SUs e o FC. Sua posição depende somente da razão sinal-ruído no canal de sensoriamento.

b) Explique melhor o que representa a curva 2 e porque ela não é uma constante.

**Resposta:** ela representa a probabilidade de erro de decisão nos SUs levando em conta os erros introduzidos pelo canal de reporte. Portanto, ela é influenciada pela razão sinal-ruído ( $\gamma$ ) do canal de reporte, tendendo ao valor constante da curva 1 à medida que  $\gamma$  cresce.

c) Por que a curva 3 é uma constante?

**Resposta:** Ela é constante, pois independe da razão sinal-ruído do canal de reporte, já que considera tal canal livre de erros (razão sinal-ruído tendendo ao infinito).

d) Por que as curvas 3 e 4 estão abaixo das curvas 1 e 2, respectivamente?

**Resposta:** As curvas 3 e 4 levam em conta o ganho de cooperação do sensoriamento, enquanto as curvas 1 e 2 se referem ao sensoriamento individual de cada SU.

e) Determine a probabilidade de erro de bit da modulação BPSK no canal de reporte para que se atinja  $P_{fa} = 0,1$  e  $P_d = 0,9$  no FC.

**Solução:** Para esses valores de probabilidade, por meio da equação (10) obtém-se  $P_{\text{erro}} = 0,1 \times 1/2 + (1-0,9) \times 1/2 = 0,1$ . Este valor de  $P_{\text{erro}}$  é atingido em  $\gamma = 0$  dB, para a qual tem-se  $P_b$  aproximadamente igual a 0,13 (por interpolação logarítmica).

---