TP537 – Transmissão Digital
2ª Avaliação – 29/05/2017 – 13:30h
Prof. Dayan Adionel Guimarães

Nota:

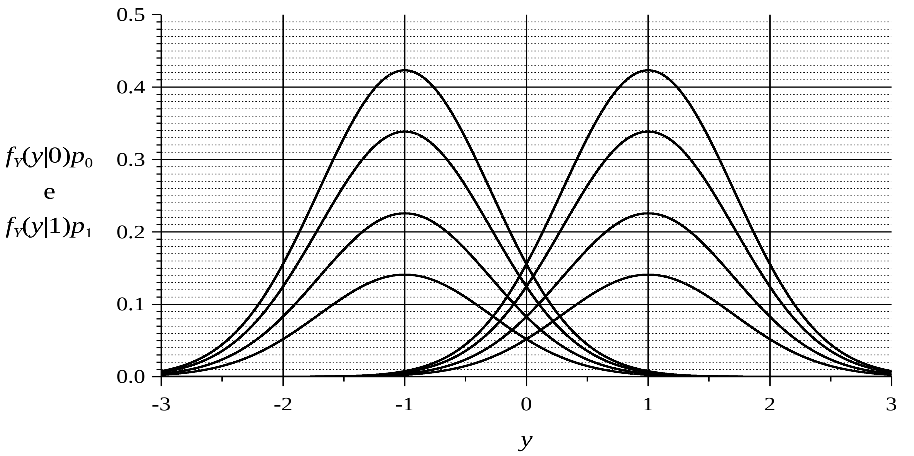
Aluno(a): ____

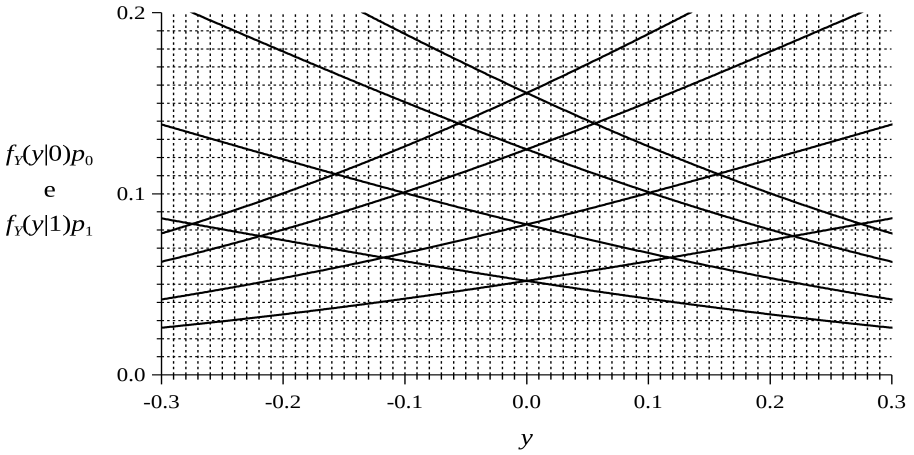
Prova com consulta ao livro texto, com duração de 3 horas.
A interpretação é parte integrante das questões.
Seja organizado e sucinto. Boa prova!

1ª questão (20 pontos)

Seja um sistema de comunicação digital com sinalização NRZ bipolar e formato de pulso $g(t)$ retangular, com amplitude 5 volts e duração 1/25 segundo. Na transmissão tem-se o mapeamento: bit "0" $\Rightarrow -g(t)$, bit "1" $\Rightarrow +g(t)$. Tal sistema opera em um canal AWGN com densidade espectral de potência de ruído $N_0/2$ watt/hertz, sendo N_0 um número inteiro. As probabilidades *a priori* dos bits são $p_0 = 2/5$ e $p_1 = 3/5$.

Os gráficos a seguir têm por objetivo auxiliar na solução da questão: o primeiro mostra várias funções de verossimilhança da variável de decisão na saída do correlator (ou do filtro casado). O segundo mostra uma ampliação da região onde ocorrem os cruzamentos entre tais funções.





a) Calcule a potência do ruído que contamina a variável de decisão. Use o fato de que praticamente toda a faixa de variação de uma variável aleatória Gaussiana em torno de sua média μ corresponde a seis desvios padrão σ, ou seja, se $f_Y(y)$ é uma função densidade de probabilidade Gaussiana, $\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f_Y(y)dy \approx 1$.

Solução

Observando o gráfico da parte superior, nota-se que a excursão da variável de decisão está por volta de 4,2 volts. Assim, σ = 4,2/6 ≅ 0,7, o que leva a $N_0/2 = 0{,}7^2 \cong 0{,}49 \Rightarrow N_0 \cong 0{,}98$. Como se afirma no enunciado que N_0 é inteiro, então seu valor é 1 watt/hertz e, portanto, a potência de ruído é $\sigma^2 = N_0/2 = 0{,}5$ watt.

b) Determine graficamente o valor do limiar de decisão, usando como auxílio os gráficos dados. Apresente justificativas para a escolha das funções.

Solução

Como a variância encontrada é 0,5 e as Gaussianas estão multiplicadas pelas probabilidades *a priori*, o pico de $f_Y(y|0)p_0$ ocorrerá em $p_0/\sqrt{2\pi\sigma^2} = (2/5)/\sqrt{2\pi(0.5)^2} \cong 0.226$. De forma análoga, o pico de $f_Y(y|1)p_1$ ocorrerá em $p_1/\sqrt{2\pi\sigma^2} = (3/5)/\sqrt{2\pi(0.5)^2} \cong 0.34$. No gráfico dado identificamos $f_Y(y|0)p_0$ sendo a segunda de baixo para cima e $f_Y(y|1)p_1$ sendo a segunda de cima para baixo. No gráfico da parte inferior obtemos o cruzamento entre elas ocorrendo em y = –0,1 volt. Portando, o limiar ótimo de decisão é λ = –0,1 volt.

c) Determine a probabilidade de erro de bit média (com 2 casas decimais).

Solução

$$P_e = p_0 p_{01} + p_1 p_{10} = \frac{p_0}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{-0{,}1+1}{\sqrt{1/2}\sqrt{2}}\right) + p_1\left[1-\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{-0{,}1-1}{\sqrt{1/2}\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{erfc}(0{,}9) + \frac{3}{5}\left[1-\frac{1}{2}\operatorname{erfc}(-1{,}1)\right] = \frac{1}{5}\operatorname{erfc}(0{,}9) + \frac{3}{5}\left[1-1+\frac{1}{2}\operatorname{erfc}(1{,}1)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\operatorname{erfc}(0{,}9) + \frac{3}{10}\operatorname{erfc}(1{,}1) \cong 0{,}08.$$

d) Calcule a potência P_{TX} do sinal transmitido, admitindo atenuação nula do canal.

Solução

Como a duração do pulso $g(t)$ é de 1/25 segundo, então $R_b = 1/T_b = 25$ bit/s. $E_b = p_0 E_{b0} + p_1 E_{b1} = \frac{2}{5}\times 1 + \frac{3}{5}\times 1 = 1$ joule, pois $E_{b0} = E_{b1} = \int_0^{1/25} 5^2\, dt = 1$. Então, $P_{TX} = E_b/T_b$ = 25 watts.

2ª questão (35 pontos)

O ruído que contamina a variável de decisão y em um sistema de comunicação com sinalização antipodal e símbolos equiprováveis tem função densidade de probabilidade

$$f(w) = \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{|w|}{a^2}, & |w| \le a \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

a) Calcule a variância da variável de decisão.

Solução

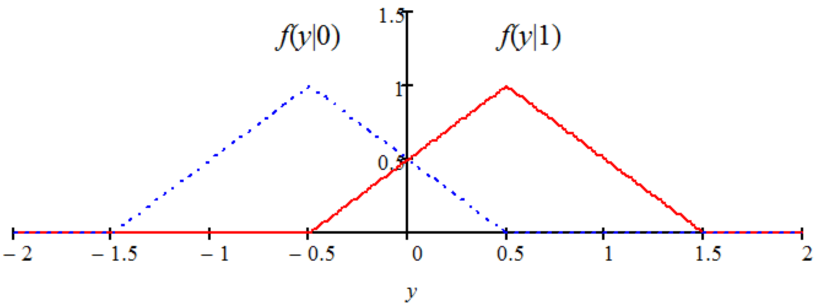
A variância de variável de decisão y é a própria variância do ruído que a contamina, ou seja,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (w - \mu_W)^2 f(w)dw = \int_{-a}^{a} w^2 \left(\tfrac{1}{a} - \tfrac{|w|}{a^2}\right) dw = 2\int_0^a w^2 \left(\tfrac{1}{a} - \tfrac{w}{a^2}\right) dw$$

$$= \tfrac{2}{a}\int_0^a w^2 dw - \tfrac{2}{a^2}\int_0^a w^3 dw = \tfrac{2}{a} \times \tfrac{w^3}{3}\Big|_0^a - \tfrac{2}{a^2} \times \tfrac{w^4}{4}\Big|_0^a = \frac{a^2}{6}$$

b) Esboce as funções de verossimilhança da variável de decisão para $a = 1$, admitindo que $y = \pm 0{,}5$ volt na ausência de ruído.

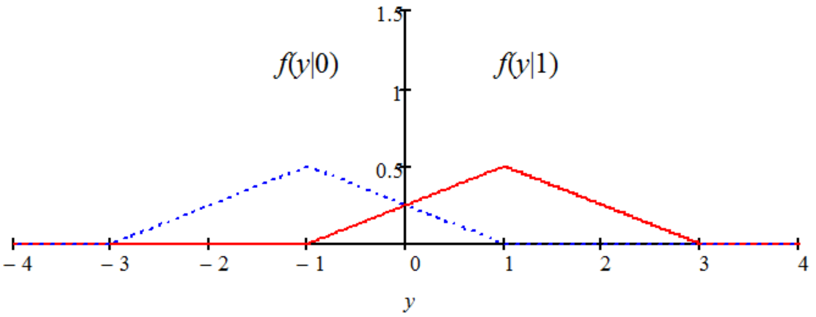
Solução



c) Admitindo que as funções de verossimilhança do item "b" tenham sido consequência de se adotar um fator de escala $k = 1$ no correlator ou no filtro casado, redesenhe tais funções considerando $k = 2$. Explique o raciocínio utilizado na construção de tal desenho.

Solução

O fator $k = 2$ duplicará a amplitude do ruído e do sinal, ou seja, as bases das novas densidades terão valor 4 e suas alturas serão 0,5 para que se mantenham áreas unitárias. As médias serão deslocadas para os pontos ±1 volt.



d) O que se pode dizer sobre as probabilidades de erro de símbolo nos casos "b" e "c"? Comprove com cálculos.

Solução

Como k afeta igualmente a parcela de sinal e a parcela de ruído, a relação sinal-ruído se mantém, mantendo assim a probabilidade de erro de símbolo. Pode-se comprovar esta afirmação notando que as áreas de sobreposição das funções de verossimilhança são iguais nos casos "b" e "c", levando à $P_e = 0{,}5p_{10} + 0{,}5p_{01} = 0{,}125$ em ambos.

e) Sem utilizar a expressão de variância obtida no item "a", calcule a variância da variável de decisão para $k = 2$, usando o fato de que quando $k = 1$ essa variância vale 1/6. Justifique seus cálculos e, em seguida, comprove-os utilizando tal expressão.

Solução
A variância de uma variável aleatória $Y = kX$ é var(Y) = k^2var(X). Então, a nova variância será $2^2 \times 1/6$ = 2/3. Para comprovar, note que se $a^2/6$ = 2/3, tem-se a = 2, ou seja, as bases das densidades valem 4 volts quando k = 2, o que se nota pelo desenho do item "c".

f) Determine a expressão de cálculo da probabilidade de erro de símbolo em função de E_b/N_0, agora admitindo que o fator de escala k tenha sido ajustado para que as médias das densidades condicionais sejam $\pm\sqrt{E_b}$ e que a potência do ruído na variável de decisão valha $N_0/2$ watts.

Solução

$$P_e = \int_0^{a-\sqrt{E_b}} f(y\,|\,0)\,dy = \int_0^{a-\sqrt{E_b}} \left(\frac{1}{a} - \frac{y+\sqrt{E_b}}{a^2}\right)dy = \frac{\left(a-\sqrt{E_b}\right)^2}{2a^2}$$

Como $N_0/2 = a^2/6$, tem-se $P_e = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{E_b}{3N_0}} + \frac{E_b}{6N_0}$.

g) Determine a potência de recepção para que P_e seja nula. Admita R_b = 1 bit/s e N_0 = 1 watt/Hz.

Solução
Neste caso tem-se $a = \sqrt{E_b}$. Como $N_0/2 = a^2/6$, tem-se $a = \sqrt{3N_0}$. Então $E_b = 3N_0$ e $P_{rx} = E_b/T_b = 3N_0$ = 3 watts.

3ª questão (10 pontos)

Justifique porque a probabilidade de erro de bit média por ramo na Fig. 6.16 é igual à de uma modulação BPSK com detecção coerente. Note que o símbolo BPSK detectado dura T e tem energia E_b, ao passo que na demodulação BPSK normal o símbolo detectado dura T_b e tem energia E_b.

Solução
Do capítulo 5, a variância de ruído Gaussiano em cada uma das variáveis de decisão x_1 e x_2 é $N_0/2$. De, (6.28), as médias das densidades Gaussianas condicionais valem $E[X_1] = E[X_2] = \int_0^T s_i(t)\phi_1(t)dt = s_{i1} = \pm\sqrt{E_b}$. Portanto, tem-se o mesmo problema de decisão de uma demodulação BPSK convencional, justificando a mesma probabilidade de erro de bit.

4ª questão (15 pontos)

Um sistema de comunicação digital opera a 10 kbit/s em um canal sem atenuação e sem distorção, e está submetido a um ruído AWG com densidade espectral de potência $N_0/2 = 1\times10^{-6}$ W/Hz. O sinal transmitido é do tipo NRZ bipolar com amplitude $A = \pm1$ volt. A potência de ruído na saída do correlator do receptor é de 1×10^{-8} watts. Determine o fator de escala k do correlator e também a resposta ao impulso do filtro casado que poderia substituir o correlator, mantendo a mesma potência de ruído de 1×10^{-8} watts.

Solução
Em uma das entradas do correlator tem-se o sinal recebido $x(t)$ e na outra se têm réplicas $kg(t)$ do formato de pulso de transmissão. Quando $kg(t)$ tem energia unitária no intervalo de bit, $\sigma^2 = N_0/2$

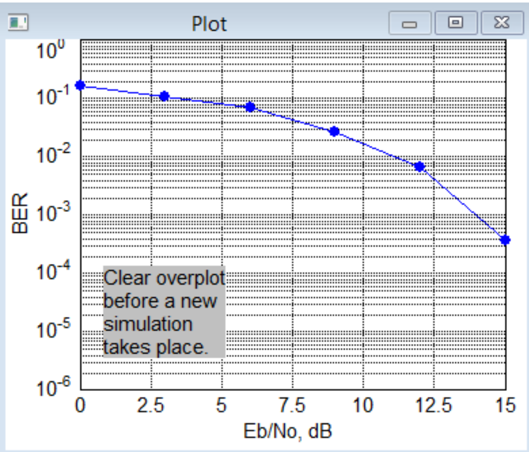
watts. Neste caso, tem-se $k^2\int_0^{T_b} g^2(t)dt = k^2\int_0^{1\times10^{-4}} dt = 1 \Rightarrow k = \sqrt{1/1\times10^{-4}} = 100$. Como no problema tem-se σ^2 = 0,01×N_0/2, então $k = \sqrt{0{,}01}\times 100 = 10$.

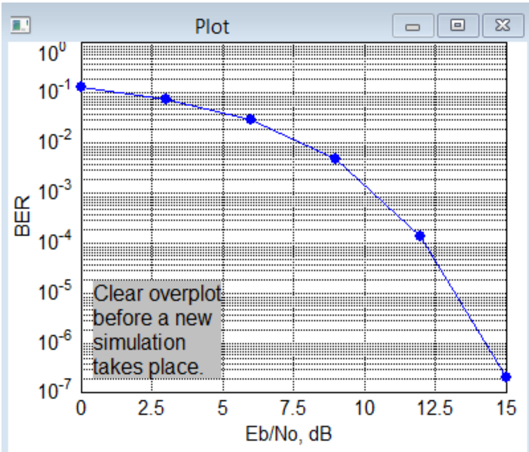
De acordo com a equação (4.26), a energia da resposta ao impulso do filtro casado é justamente a constante de multiplicação da potência $N_0/2$ watts, que para o problema é 0,01. Então a amplitude kA da resposta ao impulso é tal que $\int_0^{T_b}(kA)^2 dt = 0{,}01 \Rightarrow kA = \sqrt{0{,}01/1\times10^{-4}} = 10$ volts. Então, $h(t)$ = 10, $0 \le t \le 1\times10^{-4}$ e 0 c.c..

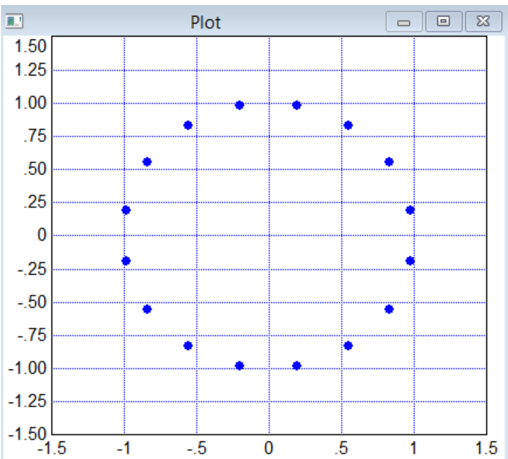
5ª questão (20 pontos)

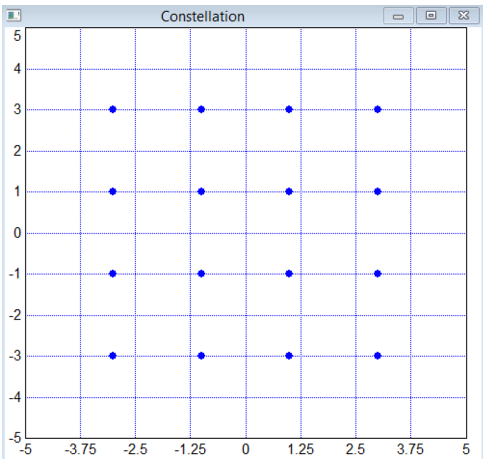
A solução desta questão deve ser enviada ao professor, por e-mail, até zero hora de 30/05/2017.

Utilizando as simulações 6.2 (MPSK_modem) e 6.4 (MQAM_modem), estime as taxas de erro de bit para as modulações 16PSK e 16QAM, para E_b/N_0 variando de 0 a 15 dB. Plote ambas as taxas de erro de bit em um único gráfico, junto com as probabilidades de erro de bit calculadas por $P_e/\log_2 M$, sendo a P_e calculada a partir do limitante de união considerando erros somente para os símbolos vizinhos mais próximos. Registre os cálculos envolvendo o limitante de união. Sabendo que o VisSim/Comm usa mapeamento Gray, comente sobre os resultados obtidos, quando possível justificando as diferenças numericamente. O grau de acerto desta questão dependerá da riqueza e precisão dos comentários e do grau de acerto na dedução da P_e.









16PSK: P = 1 watt
16QAM: P = 2.5 watts (d_{min} = 2)
T = 4 em ambas