TP537 – Transmissão Digital
1ª Avaliação – 27/10/2014 – 08:00h
Prof. Dayan Adionel Guimarães

Nota:

Aluno(a): ____

Prova com consulta ao livro texto, com duração de 3 horas.
A interpretação é parte integrante das questões.
Seja organizado e sucinto nas suas respostas.
Boa prova!

1ª questão (40 pontos)

Um sistema de comunicação digital com sinalização antipodal tem a variável de decisão y contaminada por um ruído com distribuição uniforme, média zero e variância $\sigma^2 = N_0/2$. Dados adicionais sobre a distribuição uniforme estão no Capítulo 1 do livro texto.

a) Escreva as expressões das funções densidade de probabilidade condicionadas $f(y|0)$ e $f(y|1)$ e esboce-as, sabendo que o bit 0 está associado ao sinal com polaridade positiva. Os limites das densidades devem ser escritos em função de E_b e de N_0. O limiar de decisão deve ser denotado por λ.

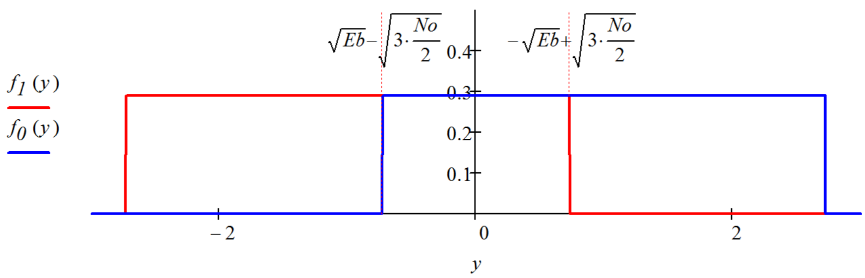
Solução

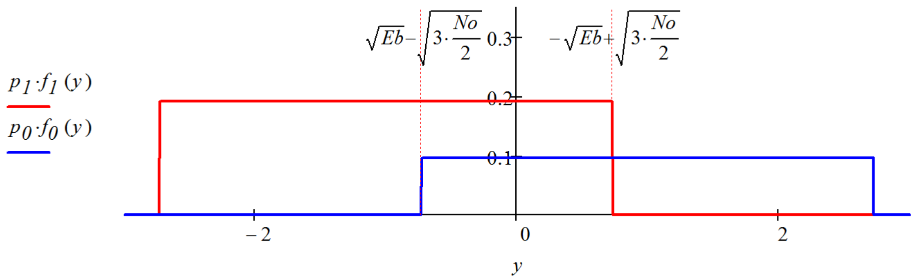
$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{N_0}{2}$. Como a média é nula, então $a = -b$, o que leva a $\sigma^2 = \frac{4b^2}{12} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{3N_0}{2}}$.

Então, $f(y|0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6N_0}}, & \left(\sqrt{E_b} - \sqrt{\frac{3N_0}{2}}\right) \le y \le \left(\sqrt{E_b} + \sqrt{\frac{3N_0}{2}}\right) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$ e

$$f(y|1) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6N_0}}, & \left(-\sqrt{E_b} - \sqrt{\frac{3N_0}{2}}\right) \le y \le \left(-\sqrt{E_b} + \sqrt{\frac{3N_0}{2}}\right) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Seguem os esboços das densidades condicionadas e das mesmas ponderadas por probabilidades *a priori* $p_0 = 1/3$ e $p_1 = 2/3$.





b) Deduza a expressão para a probabilidade de erro de bit média. Esta deve ser escrita em função das probabilidades a priori p_0 e p_1, de E_b/N_0, de $N_0/2$ e de λ.

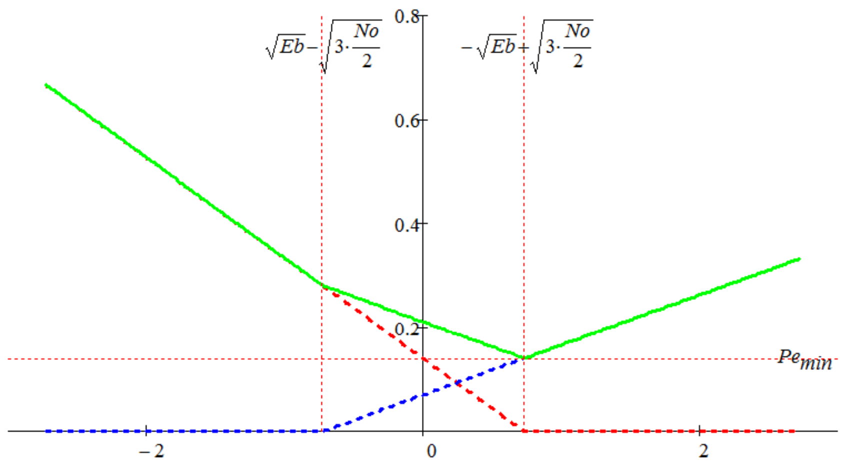
Solução

$$P_b = p_1 \int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{3N_0}{2}}-\sqrt{E_b}} f(y\,|\,1)dy + p_0 \int_{\sqrt{E_b}-\sqrt{\frac{3N_0}{2}}}^{\lambda} f(y\,|\,0)dy$$
$$= \frac{p_1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2E_b}{3N_0}}-\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{3N_0}{2}}}\right)+\frac{p_0}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2E_b}{3N_0}}+\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{3N_0}{2}}}\right)$$

c) Deduza a expressão para o limiar ótimo de decisão λ_{opt}. Esta deve ser escrita em função das probabilidades a priori p_0 e p_1, de E_b e de $N_0/2$. **Atenção**: fique atento para o formato da função que descreve a variação da probabilidade de erro em função do limiar de decisão. **Dica**: esboce esta função para que veja mais claramente seu formato e o caminho de solução.

Solução

Podemos escrever $P_b(\lambda) = \frac{p_1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2E_b}{3N_0}}-\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{3N_0}{2}}}\right)+\frac{p_0}{2}\left(1-\sqrt{\frac{2E_b}{3N_0}}+\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{3N_0}{2}}}\right)$. O caminho normal para encontrar λ_{opt} consiste em igualar a zero a derivada de $P_b(\lambda)$ em relação a λ e resolver para λ. No entanto, $P_b(\lambda)$ corresponde a duas retas com inclinações opostas, que no intervalo de variação do limiar é outra reta (veja ilustração a seguir).



Portanto, determina-se λ_{opt} encontrando o ponto de mínimo dessa reta intermediária. Este ponto será o limite superior de $f(y|1)$ se $p_1 > p_0$, será o limite inferior de $f(y|0)$ se $p_1 < p_0$, e será qualquer valor entre esses limites se $p_1 = p_0$. Como não há razão para preferir a decisão por 0 ou por 1 neste último caso, basta fazer $\lambda_{opt} = 0$ se $p_1 = p_0$. Então:

$$\lambda_{\text{opt}} = \begin{cases} -\sqrt{E_\text{b}} + \sqrt{\dfrac{3N_0}{2}}, & p_1 > p_0 \\ \sqrt{E_\text{b}} - \sqrt{\dfrac{3N_0}{2}}, & p_1 < p_0 \\ 0, & p_1 = p_0 \end{cases}$$

d) Refaça a solução do item anterior apenas aplicando a regra de decisão MAP.

Solução

Na regra MAP, decide-se por 1 se $p_1 f(y|1) > p_0 f(y|0)$ e por 0 se $p_1 f(y|1) \le p_0 f(y|0)$. Observando o esboço das densidades condicionais dado na solução do item "a" conclui-se que $p_1 f(y|1) > p_0 f(y|0)$ se $y < -\sqrt{E_\text{b}} + \sqrt{\dfrac{3N_0}{2}}$ e que $p_1 f(y|1) < p_0 f(y|0)$ se $y > \sqrt{E_\text{b}} - \sqrt{\dfrac{3N_0}{2}}$ e que $p_1 f(y|1) = p_0 f(y|0)$ para y entre $-\sqrt{E_\text{b}} + \sqrt{\dfrac{3N_0}{2}}$ e $\sqrt{E_\text{b}} - \sqrt{\dfrac{3N_0}{2}}$. Portanto, são obtidos os mesmos valores para o limiar calculados na solução do item "c".

e) Simplifique a expressão da probabilidade de erro de bit média para símbolos equiprováveis.

Solução

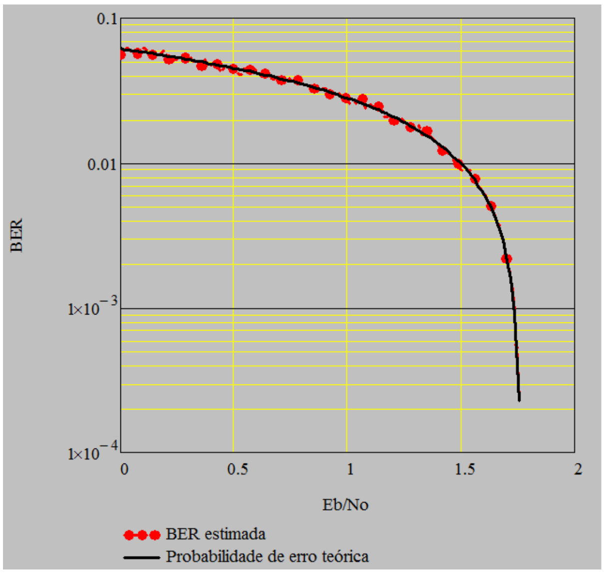
Neste caso $\lambda_{\text{opt}} = 0$, o que resulta em $P_\text{b} = \dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{E_\text{b}}{6N_0}}$.

f) Para símbolos equiprováveis, determine a partir de que valor de E_b/N_0 a probabilidade de erro de bit será nula.

Solução

$$P_\text{b} = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{E_\text{b}}{6N_0}} = 0 \Rightarrow \frac{E_\text{b}}{N_0} \ge 1{,}5 \Rightarrow \frac{E_\text{b}}{N_0} \ge 1{,}76092\ \text{dB}.$$

g) Implemente uma simulação de Monte Carlo usando o Matlab, o Mathcad ou o VisSim/Comm, de forma a comprovar as soluções desenvolvidas nesta questão. O resultado esperado é um gráfico de P_b (ou BER) versus E_b/N_0 contendo duas curvas: uma teórica e a outra obtida pela simulação. A seguir tem-se um resultado esperado para $p_0 = 1/3$ e $p_1 = 2/3$. **Envie o código por e-mail ao Prof. Dayan até 48 horas após o término da prova**.



$p_0 = \frac{1}{3}$

$p_1 = \frac{2}{3}$

$Nr_{erros} = 500$

Solução

Código Mathcad:

Números de pontos do Gráfico: $N := 100 \qquad p := 0..N-1$

Número de erros para cada ponto: $Nr_{erros} := 500$

$MinEbNo := 0 \qquad MaxEbNo := 1.755$

$$EbNo_p := (p)\cdot\frac{MaxEbNo - MinEbNo}{N-1} + MinEbNo$$

$Eb := 1$ Variância para cada p: $Var_p := \dfrac{Eb}{2\cdot 10^{\frac{EbNo_p}{10}}}$

$$
\begin{aligned}
BERu := \; & \lambda \leftarrow 0 \\
& \text{for } p \in 0..N-1 \\
& \quad C_{bits} \leftarrow 0 \\
& \quad C_{erros} \leftarrow 0 \\
& \quad \text{while } C_{erros} < Nr_{erros} \\
& \quad\quad dTx \leftarrow floor(rnd(2)) \\
& \quad\quad x \leftarrow (1 - dTx\cdot 2)\cdot\sqrt{Eb} + \left(rnd\left(2\cdot\sqrt{3\cdot Var_p}\right) - \sqrt{3\cdot Var_p}\right) \\
& \quad\quad dRx \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } x < \lambda \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
& \quad\quad E \leftarrow dRx \oplus dTx \\
& \quad\quad C_{bits} \leftarrow C_{bits} + 1 \\
& \quad\quad C_{erros} \leftarrow C_{erros} + E \\
& \quad ber_p \leftarrow \frac{C_{erros}}{C_{bits}} \\
& ber
\end{aligned}
$$

2ª questão (20 pontos)

Deduza a regra ótima de decisão para o receptor de máxima verossimilhança (portanto considerando símbolos equiprováveis), admitindo que o ruído que contamina o vetor de variáveis de decisão tem densidade de probabilidade de Laplace. Dados sobre essa distribuição estão no Capítulo 1 do livro texto. Interprete o resultado tendo como base a definição generalizada da norma de um vetor N-dimensional $\mathbf{z}$ qualquer, usualmente denominada de norma ℓ_p:

$$\|\mathbf{z}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{N} |z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Veja que a norma ℓ_2 é a conhecida norma Euclidiana: $\|\mathbf{z}\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{N} z_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Esta questão tem grande importância prática, pois a distribuição de Laplace pode modelar certos tipos de ruído impulsivo. Então, o que você irá fazer será o desenvolvimento do receptor ótimo sob este tipo de ruído.

Solução

Partindo da equação (5.39) do livro texto, teremos a regra:

Decide-se por $\hat{m} = m_i$ se $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} \mid m_k)$ é máxima quando $k = i$. Aplicando a densidade de Laplace na definição da função de verossimilhança (5.32), teremos:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} \mid m_i) = \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{2r} \exp\left(-\frac{|x_j - s_{ij}|}{r}\right) = N_0^{-N/2} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{N_0/4}} \sum_{j=1}^{N} |x_j - s_{ij}|\right], \quad i = 1, 2, \ldots, M.$$

Então, decide-se por $\hat{m} = m_i$ se $\exp\left[-\frac{1}{\sqrt{N_0/4}} \sum_{j=1}^{N} |x_j - s_{ij}|\right]$ é máxima quando $k = i$. Aplicando a definição de função de log-verossimilhança, vem:

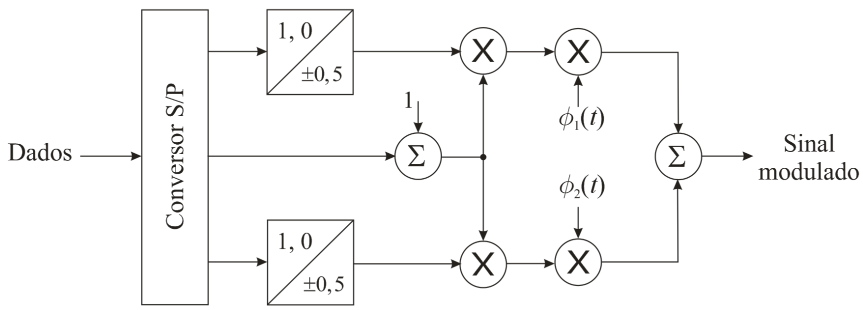
Decide-se por $\hat{m} = m_i$ se $-\frac{1}{\sqrt{N_0/4}} \sum_{j=1}^{N} |x_j - s_{ij}|$ é máxima quando $k = i$, ou $\sum_{j=1}^{N} |x_j - s_{ij}|$ é mínima quando $k = i$.

Observando a definição de norma ℓ_p conclui-se que a regra de decisão ótima será:

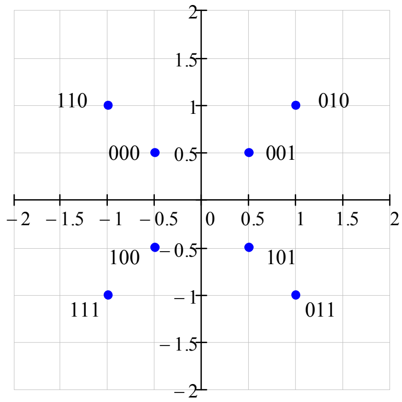
Decide-se por $\hat{m} = m_i$ se $\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\|_1$ é mínima quando $k = i$, ou seja, decide-se pelo símbolo mais próximo do vetor recebido $\mathbf{x}$ em termos de uma distância medida sob a norma ℓ_1.

3ª questão (20 pontos)

a) Desenhe a constelação e o correspondente mapeamento símbolo-bit para o modulador dado a seguir. Admita que o bit mais significativo esteja na saída superior do S/P.

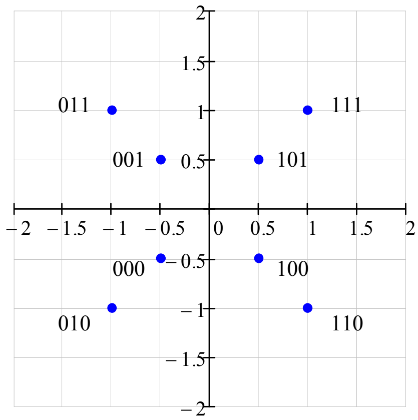


b) Comente sobre a P_e e a BER para a constelação que você encontrou no item "a" desta questão em comparação com a P_e e a BER da constelação dada a seguir, também considerando que a relação sinal-ruído é alta a ponto de fazer com que erros entre símbolos vizinhos mais próximos sejam predominantes.



Solução a

Para determinar a constelação, basta supor as 8 possíveis combinações de 3 bits na saída do conversor S/P e determinar os coeficientes (que multiplicam as funções-base). Como resultado, teremos a seguinte constelação:

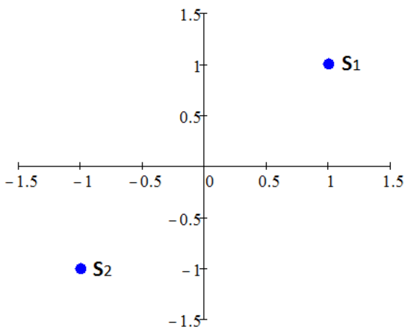


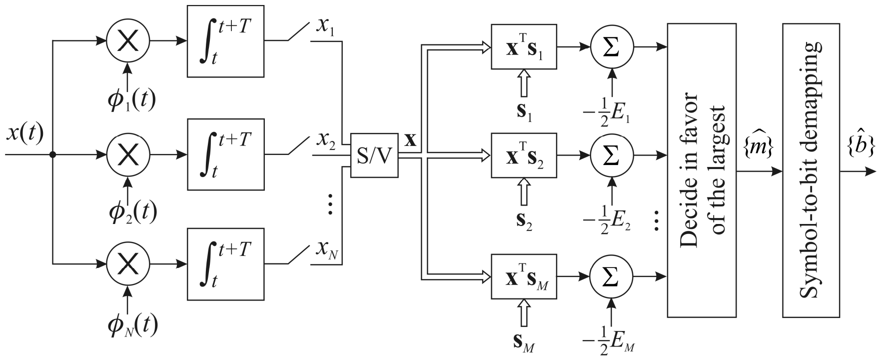
Solução b

Nota-se que a distribuição dos símbolos é a mesma, o que nos permite afirmar que a probabilidade de erro de símbolo (P_e) será a mesma nos dois casos. Com relação à probabilidade de erro de bit, nota-se que a constelação obtida no item "a" possui mapeamento Gray entre os símbolos vizinhos mais próximos, o que permite afirmar que a BER será menor que no "b".

4ª questão (20 pontos)

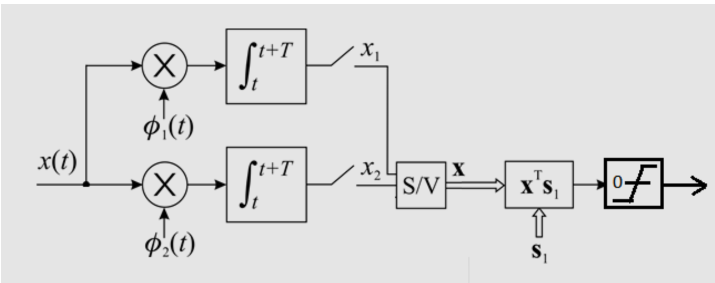
Considere a modulação binária cuja constelação é mostrada a seguir. Pede-se simplificar o receptor generalizado também dado a seguir para modulação em questão. Justifique todas as simplificações.





Solução

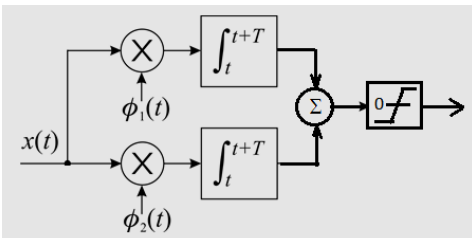
Como a modulação é binária e bidimensional, $M = N = 2$. Então, em uma primeira simplificação temos 2 correlatores e 2 ramos de produto interno. Dos 2 ramos de produto interno, o que opera sobre $\mathbf{s}_1$ produzirá o mesmo valor absoluto daquele que opera sobre $\mathbf{s}_2$, com diferença de polaridade. Então para distinguir entre $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ basta manter apenas o produto interno com $\mathbf{s}_1$, verificando a polaridade de sua saída: polaridade "+" decide-se por $\mathbf{s}_1$; polaridade "–" decide-se por $\mathbf{s}_2$. As ponderações de energia podem ser suprimidas, pois as energias de $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_2$ são iguais. Numa penúltima simplificação, o receptor então ficará assim:



Há ainda uma última simplificação. Note que o produto interno entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{s}_1$ é equivalente a

$$\int_0^T x(t)s_1(t)dt = \int_0^T x(t)[s_{11}\phi_1(t) + s_{12}\phi_2(t)]\,dt = \int_0^T x(t)\phi_1(t)dt + \int_0^T x(t)\phi_2(t)dt \text{, pois } s_{11} = s_{12} = 1.$$

Mas os resultados destas integrais já estão disponíveis na etapa de simplificação anterior. Portanto, basta somá-los e comparar o resultado com zero. Finalmente teremos o seguinte receptor para a modulação em questão:



5ª questão (20 pontos)

Suponha que, a partir de algumas medidas em campo, se tenha calculado o expoente de perdas no percurso n = 4.4. Suponha ainda que se tenha calculado o desvio padrão da potência recebida sob o efeito de sombreamento e que o valor encontrado tenha sido σ = 15.5 dB.

a) Qual será a potência média em área estimada a uma distância de 2 km do transmissor de uma estação de rádio base, se o valor médio em área medido a uma distância de referência de 100 m foi de 0 dBm?

b) Qual a probabilidade da potência do sinal recebido (média local) estar abaixo de –65 dBm, à distância de 2 km do transmissor?

c) Supondo que a cobertura da estação de rádio base seja circular, para uma área com 2 km de raio, qual a porcentagem de usuários estará sendo atendida por uma potência (média local) superior a –65 dBm, dado que a distribuição desses usuários na área sob análise é uniforme?

Solução via arquivo Modelo_Simplificado.mcd, disponível na pasta da disciplina, na página do professor: Potência a 2 km do transmissor –57,25 dBm. Probabilidade de 0,31 de a potência estar abaixo do limiar dado na borda da área circular de raio 2 km. Porcentagem de 83,3% de atendimento na área de cobertura.