TP537 – Transmissão Digital
1ª Avaliação – 28/04/2018 – 08:00h
Prof. Dayan Adionel Guimarães

Nota:

Aluno(a): ____

Prova com consulta ao livro texto (apenas), com duração de **3h**. A interpretação é parte integrante das questões. Proibido uso de calculadora programável. Seja organizado. Boa prova!

1ª questão (20 pontos)

Interpretando o código de linha Manchester como uma sinalização antipodal, deduza a expressão de sua densidade espectral de potência, admitindo bits equiprováveis. Apresente todo o desenvolvimento matemático. A expressão final deve estar no formato da equação (4.7), p. 270, com as devidas simplificações.

Solução

$$S(f)=\frac{1}{T_b}|\mathcal{F}\{g(t)\}|^2=\frac{1}{T_b}\left|A\frac{T_b}{2}\text{sinc}\left(f\frac{T_b}{2}\right)e^{-j2\pi f\frac{T_b}{4}}-A\frac{T_b}{2}\text{sinc}\left(f\frac{T_b}{2}\right)e^{-j2\pi f\frac{3T_b}{4}}\right|^2$$

$$=\frac{1}{T_b}\left[\left(A\frac{T_b}{2}\text{sinc}\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)e^{j\pi f\frac{T_b}{2}}-A\frac{T_b}{2}\text{sinc}\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)e^{j\pi f\frac{3T_b}{2}}\right)\left(A\frac{T_b}{2}\text{sinc}\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)e^{-j\pi f\frac{T_b}{2}}-A\frac{T_b}{2}\text{sinc}\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)e^{-j\pi f\frac{3T_b}{2}}\right)\right]$$

$$=\frac{T_b}{4}\left[A^2\,\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)-A^2\,\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)e^{-j\pi fT_b}-A^2\,\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)e^{j\pi fT_b}+A^2\,\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{T_b}{4}\left[2A^2\,\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)-A^2\,\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)\left(e^{-j\pi fT_b}+e^{j\pi fT_b}\right)\right]$$

$$=A^2\frac{T_b}{4}\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)\left(2-2\frac{e^{-j\pi fT_b}+e^{j\pi fT_b}}{2}\right)$$

$$=A^2\frac{T_b}{4}\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)[2-2\cos(\pi fT_b)]$$

$$=A^2\frac{T_b}{4}\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)4\left[\frac{1-\cos\left(2\pi f\tfrac{T_b}{2}\right)}{2}\right]$$

$$=A^2T_b\,\text{sinc}^2\left(f\tfrac{T_b}{2}\right)\sin^2\left(\pi f\tfrac{T_b}{2}\right)$$

2ª questão (30 pontos)

Considere um sistema de comunicação digital com sinalização antipodal e símbolos equiprováveis, no qual o receptor é construído por um correlator. Nesse sistema a transmissão do bit 1 é representada pelo sinal $g(t)$, dado por

$$g(t)=\begin{cases}+1, & 0\le t<0{,}0003\\ -1, & 0{,}0003\le t\le 0{,}001\end{cases}.$$

A forma de onda de referência do correlator é $kg(t)=g(t)/\sqrt{E}$, em que E é a energia de $g(t)$.

a) Determine a energia média por bit e a potência média de transmissão.

Solução

Como as formas de onda que representam os bits 0 e 1 são $\pm g(t)$ e os símbolos são equiprováveis, $E_b = E_{b0} = E_{b1} = E = \int_0^{T_b} g^2(t)dt = A^2 T_b = 1^2 \times 0{,}001 = 1$ mJ e $P = \dfrac{E_b}{T_b} = A^2 = 1$ watt.

b) Caso o correlator do sistema seja substituído por um filtro casado com fator de escala k = 3, determine a resposta ao impulso desse filtro e o valor médio da variável de decisão no instante de amostragem, supondo a transmissão do bit 0.

Solução

$h(t) = 3g(T_b - t) = 3g(0{,}001 - t)$. $y(T_b) = -3\int_0^{T_b} g^2(t)dt = -3E = -3A^2 T_b = -3$ mV.

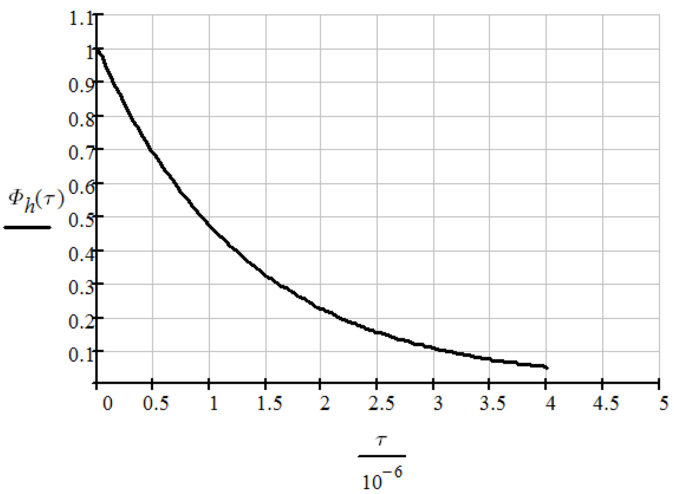
c) Calcule a energia média por bit para que tanto na saída do filtro casado quanto na saída do correlator se tenha o mesmo valor da variável de decisão, com ou sem ruído.

Solução

Os valores da variável de decisão, dada a transmissão do bit 0 ou do bit 1, são proporcionais ao fator k utilizado em cada caso. Para que sejam iguais, é necessário que os fatores k do correlator e do filtro casado também sejam iguais. Então, $\dfrac{1}{\sqrt{E}} = 3 \Rightarrow \sqrt{E} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow E = E_b = \dfrac{1}{9}$ joule.

3ª questão (20 pontos)

Considere o perfil de intensidade de potência dado a seguir, sabendo que a banda do sinal transmitido é de 1 MHz. **Obs**: Não se conhece a expressão matemática de tal perfil.



a) Calcule o espalhamento de retardo médio e rms.

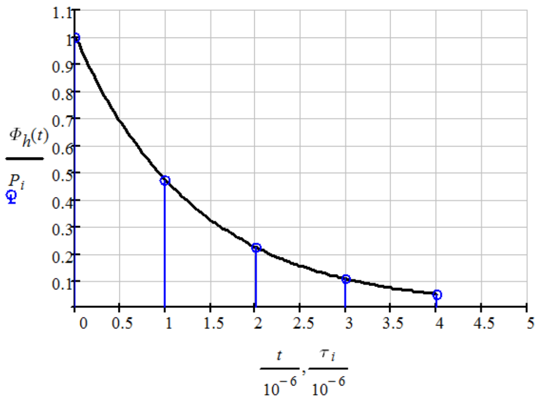
b) Calcule a banda de coerência do canal (para mínima correlação de 0,9 entre as componentes de frequência) e caracterize o desvanecimento.

Solução

$i := 0..4$

$\tau_i := i \cdot 10^{-6}$

$P_i := \Phi_h(\tau_i)$ Os atrasos no modelo tapped delay line são o recíproco da banda do sinal, ou seja, valem 1/10⁶ = 1x10⁻⁶ segundo.



$$\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\times10^{-6} \\ 2\times10^{-6} \\ 3\times10^{-6} \\ 4\times10^{-6} \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.472 \\ 0.223 \\ 0.105 \\ 0.05 \end{pmatrix} \quad \tau_m := \frac{\sum_i (P_i \cdot \tau_i)}{\sum_i P_i} \quad \sigma_\tau := \sqrt{\frac{\sum_i \left[P_i \cdot (\tau_i - \tau_m)^2\right]}{\left(\sum_i P_i\right)}}$$

Operando com os dados, obtém-se:

(a) Espalhamento de atraso médio: $\tau_m = 7.748 \times 10^{-7}$ segundos.

Espalhamento de atraso rms: $\sigma_\tau = 1.039 \times 10^{-6}$ segundos.

Usando a eq. (3.85), tem-se a banda de coerência:

$B_c := \frac{1}{50 \cdot \sigma_\tau}$ $\quad B_c = 19.244 \times 10^3$

(b) Se o sistema opera com sinal de banda B = 1 MHz, que é um valor significativamente maior que a banda de coerência do canal, haverá desvanecimento seletivo com elevada probabilidade.

4ª questão (30 pontos)

Um transmissor de teste foi instalado em campo e as seguintes potências médias locais do sinal recebido foram medidas: 0, -57, -95 e -110 dBm. Tais potências foram medidas respectivamente às seguintes distâncias do transmissor: 1, 100, 500 e 800 m.

a) Calcule o expoente de atenuação do ambiente e o desvio padrão do sombreamento log-normal.

Solução

Valores de potência média em área (area mean) estimados segundo o modelo simplificado: $pe(n,k) := p_0 - 10 \cdot n \cdot log\left(\frac{d_k}{d_0}\right)$

Formação do Erro Médio Quadrático (EMQ): $\varepsilon(n) := \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} \left(p_k - pe(n,k)\right)^2$

Solução da derivada em n do EMQ, igualada a zero:

$$n_{minEMQ} := \left(\frac{d}{dn}\varepsilon(n)\right) \; solve, n \; \rightarrow \frac{ln(10) \cdot (114 \cdot ln(10) + 95 \cdot ln(500) + 110 \cdot ln(800))}{40 \cdot ln(10)^2 + 10 \cdot ln(500)^2 + 10 \cdot ln(800)^2}$$

Valor de n que minimiza o EMQ: $n_{minEMQ} = 3.499$, $n := n_{minEMQ}$

Desvio padrão do sombreamento logonormal, em dB: $\sigma := \sqrt{\varepsilon(n)}$, $\sigma = 7.741$

b) Calcule a probabilidade de a potência média local ser maior que -110 dBm em toda área de uma célula circular de raio 1000 m.

Função de probabilidade gaussiana: $Q(x) := \frac{1}{2} \cdot erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

Potência média em área à distância sob análise, $d_\gamma = 1 \times 10^3$: $p_m := p_0 - 10 \cdot n \cdot log\left(\frac{d_\gamma}{d_0}\right)$

Probabilidade da potência média local ser maior que $\gamma = -110$ na borda da célula circular de raio igual a $d_\gamma = 1 \times 10^3$.

$$x := \frac{\gamma - p_m}{\sigma}$$

$$P_{borda} := Q(x)$$

$$P_{borda} = 0.742$$

Probabilidade da potência média local ser maior que γ em toda área circular de raio igual a d_γ.

$$P_{área} := \frac{1}{2} \cdot \left[erfc\left[\frac{(\gamma - p_m)}{\sigma \cdot \sqrt{2}}\right] + exp\left[\frac{1 - 2 \cdot \left[\frac{(\gamma - p_m)}{\sigma \cdot \sqrt{2}}\right] \cdot \frac{10 \cdot n \cdot log(e)}{\sigma \cdot \sqrt{2}}}{\left(\frac{10 \cdot n \cdot log(e)}{\sigma \cdot \sqrt{2}}\right)^2}\right] \cdot \left[erfc\left[\frac{1 - \left[\frac{(\gamma - p_m)}{\sigma \cdot \sqrt{2}}\right] \cdot \frac{10 \cdot n \cdot log(e)}{\sigma \cdot \sqrt{2}}}{\frac{10 \cdot n \cdot log(e)}{\sigma \cdot \sqrt{2}}}\right]\right]\right]$$

$$P_{área} = 0.897$$

c) Uma simulação de Monte Carlo é um recurso computacional muito utilizado para se determinar médias estatísticas de alguma grandeza associada a um sistema, quando tal sistema está sujeito à influência de uma ou mais variáveis aleatórias. Em resumo, em cada evento de Monte Carlo são geradas as variáveis aleatórias presentes no modelo do sistema, medindo-se a grandeza de interesse. Após um número suficientemente elevado de eventos se tem condições de analisar estatisticamente as variações da grandeza de interesse, bem como medi-la estatisticamente (por meio das médias estatísticas, por exemplo). No contexto do presente problema, uma simulação de Monte Carlo poderia ser utilizada para calcular a probabilidade solicitada no item anterior, sem fazer uso da Equação (3.57) ou da Figura 3.18. Descreva um método de Monte Carlo para calcular tal probabilidade. Após a prova, em casa, implemente o método descrito no Matlab ou no Mathcad e envie o código ao professor até às 12h do dia seguinte.

Solução

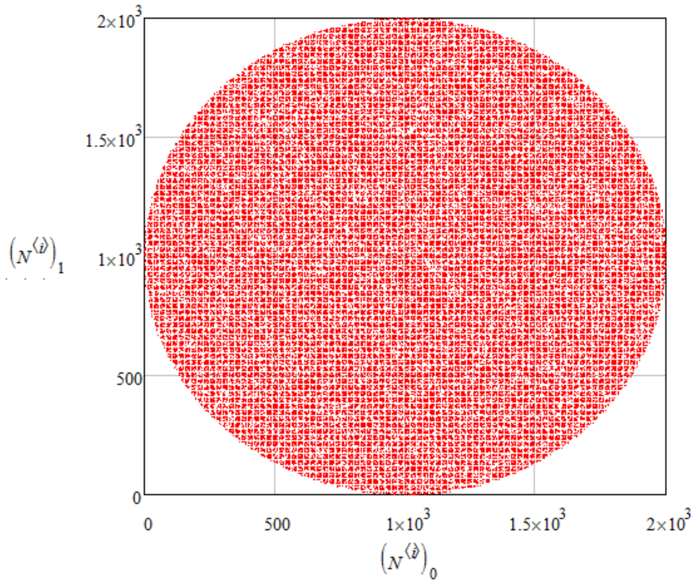
Primeiro define-se uma área circular de raio 1000 m. Em seguida distribui-se um número *N* elevado (por exemplo, $N = 10000$) de localizações (coordenadas) aleatoriamente geradas na área definida. Para cada localização calcula-se a distância até o centro (coordenada do transmissor). Com essa distância, a distância de referência de 1 m e a potência de referência de 0 dBm aplica-se (3.48) e (3.54), calculando a probabilidade da potência média local estar acima do valor de referência para cada uma das *N* distâncias. Ao final calcula-se a média das *N* probabilidades, valor que deve convergir para aquele calculado no item anterior. Alternativamente, pode-se somar uma variável aleatória *X* com média nula e desvio padrão σ aos *N* valores de potência média em área em cada ponto, dividindo-se por *N* o número de ocorrências da variável resultante (potência média local) acima do limiar sob análise. Segue um código implementado no Mathcad.

Center: $\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} d_\gamma \\ d_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 10^3 \\ 1 \times 10^3 \end{pmatrix}$

$N_{pt} := 100000$

$$
N := \left|
\begin{array}{l}
i \leftarrow 0 \\
NN_{1,N_{pt}} \leftarrow 0 \\
N_{1,N_{pt}} \leftarrow 0 \\
\text{while } i < N_{pt} \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
p \leftarrow \begin{pmatrix} rnd(2 \cdot d_\gamma) \\ rnd(2 \cdot d_\gamma) \end{pmatrix} \\
\text{if } \left[\sqrt{\left[p - \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \right]^T \cdot \left[p - \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \right]} < d_\gamma \right] \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
NN^{\langle i \rangle} \leftarrow p \\
i \leftarrow i + 1
\end{array}
\right.
\end{array}
\right. \\
NN
\end{array}
\right.
$$

$i := 0 .. N_{pt} - 1$



Potência média em área à cada distância sob análise: $p_{m_i} := p_0 - 10 \cdot n \cdot \log\left[\dfrac{\sqrt{\left[N^{\langle i\rangle} - \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}\right]^T \cdot \left[N^{\langle i\rangle} - \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}\right]}}{d_0}\right]$

$P_{borda_i} := Q\left(\dfrac{\gamma - p_{m_i}}{\sigma}\right)$

$mean(P_{borda}) = 0.898$ $P_{área} = 0.897$

Alternativamente: $p_{m_i} := p_0 - 10 \cdot n \cdot \log\left[\dfrac{\sqrt{\left[N^{\langle i\rangle} - \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}\right]^T \cdot \left[N^{\langle i\rangle} - \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix}\right]}}{d_0}\right] + rnorm(1, 0, \sigma)_0$

$$\frac{\sum_{i=0}^{N_{pt}-1} \left(p_{m_i} > \gamma\right)}{N_{pt}} = 0.897$$