T501 – Probabilidade, Estatística e Processos Estocásticos
Prova 2 – 11/11/2014 – 13:30h
Prof. Dayan Adionel Guimarães

Nota:

Aluno(a): ____ Matrícula _______________

- **Prova com duração de 2h30min, com consulta ao livro do Leon Garcia, ao livro do Prof. Dayan ou à apostila do Prof. Dayan.**

1ª questão (40 pontos: 6x5 + 1x10)

Um ruído Gaussiano branco, que é um processo aleatório ergódico de média nula e densidade espectral de potência de $N_0/2$ watts/hertz, é amostrado a uma taxa de $2B$ amostras por segundo depois de ter sido filtrado por um filtro passa-baixas ideal de banda B Hz e ganho unitário. Responda a cada uma das perguntas a seguir, justificando as respostas da forma mais completa que puder, seja com cálculos ou com argumentos.

a) Qual é o tipo de função densidade de probabilidade da variável aleatória Y formada pelas amostras?

b) Qual será a correlação entre tais amostras?

c) Qual será a média da variável aleatória composta por essas amostras?

d) Qual será a variância do processo aleatório de saída do filtro?

e) Qual será o valor da covariância entre as amostras de saída do filtro?

f) O que se pode dizer sobre o grau de ortogonalidade e de correlação entre variáveis formadas pelas amostras de saída do filtro?

g) O que se pode dizer sobre o grau de dependência entre variáveis formadas pelas amostras de saída do filtro? Dado: sabe-se que a densidade conjunta de duas variáveis aleatórias formadas por amostras de um processo Gaussiano é uma densidade Gaussiana bidimensional dada por

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{\sigma_1^2(x_2-\mu_2)^2+\sigma_2^2(x_1-\mu_1)^2-2\rho\sigma_1\sigma_2(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{2\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\right],$$

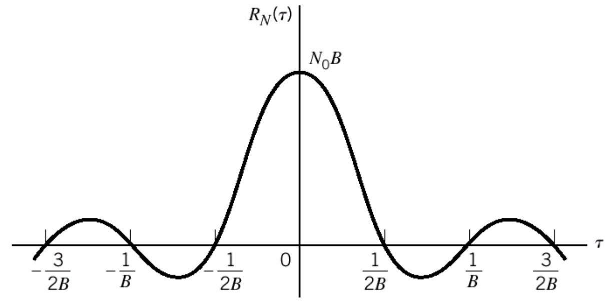
em que ρ é o coeficiente de correlação entre tais variáveis.

Solução a

Como o processo de entrada do filtro é Gaussiano, o processo de saída será também Gaussiano. Portanto, a fdp da variável aleatória formada por amostras deste processo será Gaussiana.

Solução b

A função de autocorrelação do processo $N(t)$ de saída do filtro será $R_N(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_N(f)\exp(j2\pi f\tau)df$ = $\int_{-B}^{B}\frac{N_0}{2}\exp(j2\pi f\tau)df=N_0B\,\text{sinc}(2B\tau)$. Esta função é esboçada a seguir, onde se observa que a correlação será nula se as amostras forem tomadas com separação múltipla inteira de $1/(2B)$ segundos. Como a taxa de amostragem de $2B$ amostras por segundo corresponde à separação de $1/(2B)$ segundos, a correlação será nula.



Solução c

$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt$, mas como $\mu_X = 0$, $\mu_Y = 0$.

Solução d

$\text{var}[Y(t)] = E[(Y(t)-\mu_Y)^2]$. Como $\mu_Y = 0$, $\text{var}[Y(t)] = E[Y^2(t)] = R_Y(0) = N_0 B$.

Solução e

$K_Y(\tau) = R_Y(\tau) - \mu_Y^2$. Como $\mu_Y = 0$, $K_Y(\tau) = R_Y(\tau)$. Portanto, $K_Y(1/2B) = R_Y(1/2B) = 0$.

Solução f

Como $R_Y(1/2B) = 0$, as variáveis são ortogonais. Como $K_Y(1/2B) = 0$, as variáveis são descorrelacionadas.

Solução g

Como as variáveis correspondentes às amostras de saída são descorrelacionadas, então $\rho = 0$ e

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left[-\frac{\sigma_1^2(x_2-\mu_2)^2+\sigma_2^2(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right],$$

de onde nota-se que a densidade conjunta é o produto das densidades individuais. Então, as variáveis de saída são independentes.

2ª questão (20 pontos: 2x10)

Um processo aleatório estacionário e Gaussiano $X(t)$, de média igual a 5 volts, atravessa um sistema linear invariante no tempo cuja resposta ao impulso é dada ao lado. A saída é o processo aleatório $Y(t)$, com $E\{(Y(t) - E[Y(t)])^2\} = \psi$, para o qual se pede determinar **a)** $E[Y(t)]$ e **b)** a função densidade de probabilidade.

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 0{,}1 \text{ s} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Solução a

$$E[Y(t)] = \mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = 5\int_0^{0.1} 1\,dt = 5(t)\Big|_{t=0}^{0.1} = 0{,}5 \text{ volts}$$

Solução b

Se o processo aleatório de entrada é Gaussiano, o processo de saída também será. A média para $Y(t)$ já foi calculada e a variância foi dada e vale ψ. Então a FDP de $Y(t)$ será

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\psi}}\exp\left[-\frac{(y-0{,}5)^2}{2\psi}\right]$$

3ª questão (15 pontos)

Seja $X(t)$ um processo aleatório Gaussiano, estacionário e de média nula, com função de autocorrelação $R_X(\tau)$. Este processo atravessa um dispositivo que produz em sua saída o processo aleatório $Y(t) = X^2(t)$. Mostre que $R_Y(\tau) = [R_X(0)]^2 + 2[R_X(\tau)]^2$ usando o fato de que, para variáveis aleatórias W e Z conjuntamente Gaussianas e de média nula, tem-se $E[W^2Z^2] = E[W^2]E[Z^2] + 2E^2[WZ]$.

Solução

$R_Y(\tau) = R_Y(t_1, t_1+\tau) = R_Y(t_1, t_2) = E[Y(t_1)Y(t_2)]$. Como $Y(t) = X^2(t)$, então $E[Y(t_1)Y(t_2)] = E[X^2(t_1)X^2(t_2)]$.
Como $X(t_1)$ e $X(t_2)$ são variáveis aleatórias Gaussianas de média nula, usamos a identidade dada para escrever $R_Y(t_1, t_2) = E[X^2(t_1)]E[X^2(t_2)] + 2E^2[X(t_1)X(t_2)]$.
Como $X(t)$ é estacionário, $E[X^2(t_1)] = E[X^2(t_2)] = E[X^2(t)]$ e $E[X(t_1)X(t_2)] = E[X(t_1)X(t_1+\tau)] = R_X(\tau)$.
Pelas propriedades da função de autocorrelação $E[X^2(t)] = R_X(0)$.
Com estes resultados temos então que $R_Y(\tau) = [R_X(0)]^2 + 2[R_X(\tau)]^2$.

4ª questão (25 pontos)

Implementar uma rotina no *Mathcad* ou no *Matlab*, ou um sistema em blocos no *VisSim*/*Comm*, para gerar uma variável aleatória com distribuição Binomial com parâmetro $n = 3$ e com parâmetro p configurável, usando o método da CDF inversa. Faça uma descrição detalhada da sua implementação e insira nela alguma forma de mostrar a variável gerada ao longo do tempo e como um histograma que comprove o funcionamento do gerador. Envie ao professor, por e-mail, a sua rotina e a correspondente descrição no prazo de seis horas após o término da prova em sala. Esta questão pode ser feita individualmente ou em grupo de dois alunos.