

# An Empirical Method for Estimating the Number of Signal Sources

D. A. Guimarães, *Member, IEEE*, P. M. Soares and R. A. A. de Souza, *Member, IEEE*

**Abstract**— In this paper we propose an empirical method for estimating the number of sources of signals impinging on multiple sensors. The method is based on the analysis of the norms of vectors whose elements are the normalized eigenvalues of the received signal covariance matrix and the corresponding normalized indexes. It is shown that such norms can be used to classify the eigenvalues in two groups: the largest and the remaining ones, thus allowing for the estimation of the number of sources without the knowledge of any additional parameter. It is shown that, in some situations, our norm-based method produces satisfactory performance when compared to a recently proposed random matrix theory method.

**Keywords**— Estimation of the number of sources, random matrix theory.

## I. INTRODUÇÃO

DETECTAR o número de fontes de sinais por meio de múltiplos sensores é um problema clássico em processamento digital de sinais, encontrando aplicações, por exemplo, em medicina, radares, sensoriamento espectral em sistemas de rádio cognitivo, estimação de parâmetros e em muitas outras áreas [1]-[8]. Em sistemas de rádio cognitivo (RC) [9], por exemplo, é importante que a rede secundária conheça o número de transmissores para que possa corretamente computar a estatística de teste que permitirá verificar o estado de ocupação do espectro, ou até mesmo como dado adicional de entrada do processo cognitivo. Em sistemas de radar, a estimação do número de fontes pode auxiliar no conhecimento do número de ecos de um sinal refletido por um alvo, permitindo que etapas posteriores de processamento reduzam a influência de tais ecos na caracterização do alvo [2][10]. Em medicina, a estimação do número de fontes pode ser utilizada, por exemplo, na contagem das regiões que respondem a estímulos controlados em cada parte do cérebro, permitindo que se mapeiem as áreas cerebrais sensíveis a cada tipo de estímulo [8]. Outra aplicação consiste da estimação da variância de ruído térmico na entrada de um receptor na presença de sinal, situação em os algoritmos utilizados necessitam conhecer o número de sinais recebidos de forma que operem a contento [3]. Este também é o caso de vários algoritmos de estimação de direção de chegada (DoA, *direction of arrival*) de sinais em arranjos de antenas, os quais produzem estimativas mais precisas se o número de fontes é conhecido [11][12].

Muito se tem pesquisado sobre a estimação do número de fontes desde o trabalho seminal de M. Wax e T. Kailath [2], o qual iniciou a disseminação dos métodos fundamentados pela teoria da informação. Entre eles merecem destaque o método baseado no critério de informação de Akaike (AIC, *Akaike information criterion*), o método do comprimento de mínima descrição (MDL, *minimum description length*) e o método baseado no critério de informação Bayesiana (BIC, *Bayesian information criterion*) [13]. Dentre estes, o método MDL tem sido considerado referência ou elemento de comparação na maioria dos estudos [3].

Métodos baseados na teoria de matrizes aleatórias (RMT, *random matrix theory*) têm sido explorados como alternativos em relação àqueles baseados na teoria da informação. Em [3], por exemplo, são aplicados recentes resultados sobre a distribuição dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido e do ruído em um novo algoritmo baseado em uma sequência de testes de hipóteses. O algoritmo de [3] procura obter alta probabilidade de detecção correta em regimes de baixa relação sinal-ruído, característica marcante do estimador AIC, bem como boa consistência em regimes de grandes números de amostras do sinal recebido, característica relevante do estimador MDL. A maior desvantagem do método baseado na teoria de matrizes aleatórias consiste da necessidade de se estimar a variância de ruído térmico para que, em seguida, um limiar de decisão do teste de hipóteses seja computado. Isto pode representar um grande obstáculo de ordem prática, além de produzir variação de desempenho em função do grau de precisão do valor estimado de variância.

Nos métodos baseados na teoria da informação, assim como no método baseado na teoria de matrizes aleatórias, o número de fontes é estimado tomando por base uma classificação dos autovalores da matriz de covariância do sinal (estímulo) sensoriado. Tal classificação pode ser caracterizada como um problema de seleção de modelo (*model selection*) ou de determinação de ordem de modelo (*model order determination*) e busca identificar, dentre todos os autovalores, um subconjunto cujo número de elementos está associado ao número de sinais recebidos. Esta classificação dos autovalores corresponde a um dos maiores desafios destes métodos.

### A. Contribuições e estrutura do artigo

Neste artigo propõe-se um novo método para se estimar o número de fontes de sinais contaminados por ruído, em canal com desvanecimento. O método tem sua fundamentação construída de forma empírica e é baseado na análise das normas de vetores cujos elementos são cada um dos autovalores normalizados da matriz de covariância do sinal

D. A. Guimarães, Instituto Nacional de Telecomunicações (Inatel), Santa Rita do Sapucaí, Minas Gerais, Brasil, dayan@inatel.br

P. M. Soares, Instituto Nacional de Telecomunicações (Inatel), Santa Rita do Sapucaí, Minas Gerais, Brasil, patricia\_ms14@hotmail.com

R. A. A. de Souza, Instituto Nacional de Telecomunicações (Inatel), Santa Rita do Sapucaí, Minas Gerais, Brasil, rausley@inatel.br

recebido por um arranjo (real ou virtual) de antenas (ou sensores) e os correspondentes índices, também normalizados. Como demonstrado mais adiante, tal norma pode ser usada para classificar os autovalores, discriminando os maiores dos demais e permitindo que se estime o número de fontes sem que se conheça nenhum parâmetro adicional. O método baseado em norma (NB, *norm-based*), como aqui é chamado, é comparado com a proposta baseada na teoria de matrizes aleatórias de [3], aqui simplesmente denominada de método RMT ou, alternativamente, algoritmo RMT. Como principais vantagens do método NB destacam-se a menor complexidade de implementação e a possibilidade de superar o desempenho do método RMT em diversas situações.

O restante do artigo está organizado da seguinte maneira: Na Seção II descreve-se a formulação do problema. Na Seção III é apresentado de forma sucinta o método baseado na teoria de matrizes aleatórias proposto em [3]. A Seção IV é dedicada à descrição do método NB. Na Seção V são apresentados resultados de simulação comparando os métodos NB e RMT. A Seção VI conclui o trabalho e aponta oportunidades para continuidade das pesquisas.

## II. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere que os sinais transmitidos por  $p$  transmissores (fontes) incidem sobre um arranjo real (um receptor com  $m$  antenas ou sensores) ou virtual ( $m$  receptores com uma antena ou sensor cada). No  $i$ -ésimo instante de tempo discreto,  $i = 1, 2, \dots, n$ , o sinal incidente resultante pode ser representado por

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{H}\mathbf{s}_i + \mathbf{n}_i, \quad (1)$$

em que  $\{\mathbf{x}_i\} = \{\mathbf{x}(t_i)\}$  denota observações  $m$ -dimensionais do sinal recebido,  $\mathbf{H}$  é a matriz de canal de ordem  $m \times p$ , com  $p$  colunas linearmente independentes contendo  $m$  elementos. Os elementos  $\{h_{kl}\}$  de  $\mathbf{H}$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  e  $l = 1, 2, \dots, p$ , representam o ganho do canal entre o  $l$ -ésimo transmissor e o  $k$ -ésimo sensor. O conjunto  $\{\mathbf{s}_i\}$ , com elementos de ordem  $p \times 1$ , representa sinais transmitidos aleatórios, estacionários e de média nula. Por fim,  $\{\mathbf{n}_i\}$ , com elementos de ordem  $m \times 1$ , representa os vetores de ruído aditivo Gaussiano  $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ , com  $\mathbf{I}$  sendo uma matriz identidade de ordem  $m$ .

Seja  $\mathbf{R}$  a matriz de covariância do sinal recebido, a qual pode ser estimada pela média amostral (*sample covariance matrix*)

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\dagger = \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{X}^\dagger, \quad (2)$$

em que  $\dagger$  denota conjugado transposto e  $\mathbf{X}$ , de ordem  $m \times n$ , é a matriz formada arranjando-se lado a lado os  $n$  vetores  $\{\mathbf{x}_i\}$ .

Seja  $\mathbf{S}$ , de ordem  $p \times n$ , a matriz formada arranjando-se lado a lado os  $n$  vetores  $\{\mathbf{s}_i\}$  e  $\mathbf{N}$ , de ordem  $m \times n$ , a matriz formada arranjando-se lado a lado os  $n$  vetores  $\{\mathbf{n}_i\}$ . Então, de forma compacta,  $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{N}$ .

Devido à média nula do ruído e sua independência do sinal, pode-se facilmente verificar que  $\mathbf{R}$  pode ser assim escrita:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^\dagger] = \mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger + \sigma^2\mathbf{I}, \quad (3)$$

em que  $\mathbf{R}_s$  é a matriz de covariância do sinal transmitido, ou seja,  $\mathbf{R}_s = E[\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger]$ . Da teoria de álgebra linear, se a matriz de canal  $\mathbf{H}$  tiver todas as  $p$  colunas linearmente independentes (*full rank*), o posto (*rank*) da matriz  $\mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger$  será  $p$  ou, equivalentemente, os  $m - p$  menores autovalores de  $\mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger$  serão nulos. Como os autovalores de  $\mathbf{R}$  são os autovalores de  $\mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger$  mais os autovalores de  $\sigma^2\mathbf{I}$ , então os  $m - p$  menores autovalores de  $\mathbf{R}$  serão iguais a  $\sigma^2$ . Note então que é possível se estimar o número de fontes  $p$  determinando-se a multiplicidade dos menores autovalores de  $\mathbf{R}$ .

Na prática, entretanto, não se conhece a matriz de covariância  $\mathbf{R}$ , mas apenas sua estimativa  $\hat{\mathbf{R}}$ , a qual é obtida a partir de um número finito de amostras, cf. (2). Neste caso os autovalores de  $\hat{\mathbf{R}}$  serão diferentes com probabilidade 1 [2], e a estimação do número de fontes meramente “observando” os autovalores se tornará tarefa bastante complexa. A classificação dos autovalores de  $\hat{\mathbf{R}}$  em dois grupos que permitam identificar quantos são os maiores (ou menores) corresponde justamente ao maior problema na estimação do número de fontes por meio da estimativa da matriz de covariância do sinal recebido. O que se propõe neste artigo é uma maneira empírica de se realizar essa classificação e, por consequência, realizar a estimação do número de fontes.

## III. ESTIMAÇÃO DO NÚMERO DE FONTES VIA RMT

Nesta seção é apresentado de forma sucinta o método de estimação do número de fontes proposto em [3]. Antes, porém, são sumarizados alguns resultados da teoria de matrizes aleatórias, os quais serão úteis tanto ao entendimento do método proposto em [3] quanto do método aqui proposto.

### A. Alguns resultados da teoria de matrizes aleatórias

Suponha que se deseja decidir entre as hipóteses  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$ , as quais correspondem à ausência de sinal recebido e à presença de um único sinal com variância conhecida  $\theta$ , respectivamente. Tais hipóteses podem ser assim descritas:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 : \mathbf{R} &= \sigma^2\mathbf{I} \\ \mathcal{H}_1 : \mathbf{R} &= \mathbf{H}\mathbf{R}_s\mathbf{H}^\dagger + \sigma^2\mathbf{I} = \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0) + \sigma^2\mathbf{I}, \end{aligned} \quad (4)$$

em que  $\text{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$  é a matriz diagonal cujos elementos não nulos são os valores  $(\theta, 0, \dots, 0)$ .

Admitindo que a variância de ruído seja conhecida *a priori*, para qualquer valor de  $m$  e  $n$ , para as duas hipóteses há somente duas densidades de probabilidade para os autovalores de  $\mathbf{R}$ . Neste caso o procedimento ótimo para se distinguir entre as duas hipóteses é a razão entre as correspondentes funções de verossimilhança, teste também conhecido como teste de razão de verossimilhança (*likelihood ratio test*) ou teste de Neyman-Pearson. O desenvolvimento matemático do teste de Neyman-Pearson produz o importante resultado que afirma: para  $n \rightarrow \infty$ , com  $m$  fixo, a distinção entre  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$  em (4) deve ser baseada somente na observação do máximo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido, que é

justamente o que se propõe no conhecido teste de Roy de máxima raiz (RLRT, *Roy's largest root test*) [14].

Desenvolvimento similar ao teste de Neyman-Pearson pode ser aplicado ao teste que permite distinguir entre as hipóteses

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &: k - 1 \text{ sinais presentes,} \\ \mathcal{H}_1 &: k \text{ sinais presentes.} \end{aligned} \quad (5)$$

Novamente admitindo conhecimento *a priori* da variância de ruído e da intensidade dos sinais, o resultado do desenvolvimento matemático do teste de Neyman-Pearson permite afirmar que, assintoticamente, a distinção entre  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_1$  em (5) deve ser baseada somente na observação do  $k$ -ésimo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido [3]. Considera-se implicitamente que os autovalores de  $\mathbf{R}$  estão ordenados de forma decrescente, ou seja,  $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m\}$ .

Em ambos os testes de hipóteses anteriormente descritos, a “observação” de um autovalor corresponde a um teste de significância em que cada autovalor é comparado com um limiar, o qual deve ser calculado em função do nível de confiança esperado sobre o resultado do teste. Resultados da teoria de matrizes aleatórias também trazem úteis informações sobre a determinação desse limiar, como descrito a seguir.

Seja  $\hat{\mathbf{R}}$  a estimativa da matriz de covariância do sinal recebido, cf. (2), mas considerando apenas a presença do ruído. No limite conjunto  $m, n \rightarrow \infty$ , com  $n/m \rightarrow c \geq 0$ , a distribuição do máximo autovalor da matriz aleatória  $\hat{\mathbf{R}}$  converge para a distribuição de Tracy-Widom, dada por

$$\Pr \left\{ \frac{\lambda_1 / \sigma^2 - \mu_{n,m}}{\xi_{n,m}} > s \right\} \rightarrow F_\beta(s), \quad (6)$$

em que  $\mu_{n,m}$  e  $\xi_{n,m}$  são respectivamente os parâmetros de centralização e de escala da distribuição de Tracy-Widom  $F_\beta(s)$  e  $\beta$  indica se as amostras de ruído são reais ( $\beta = 1$ ) ou complexas ( $\beta = 2$ ).

Para o caso do teste de Roy de máxima raiz, a hipótese  $\mathcal{H}_0$  é rejeitada se [3]

$$\lambda_1 > \sigma^2 [\mu_{n,m} + s(\alpha)\xi_{n,m}], \quad (7)$$

em que  $\alpha$  é a chamada probabilidade de falso alarme assintótica, que é o nível de confiança esperado sobre o resultado do teste de hipóteses. Ainda com relação a (7),  $s(\alpha)$  é tal que

$$F_\beta[s(\alpha)] = 1 - \alpha. \quad (8)$$

Como não há expressão fechada para a distribuição de Tracy-Widom,  $s(\alpha)$  pode ser calculada invertendo-se numericamente  $F_\beta(s)$ , ou seja,

$$s(\alpha) = F_\beta^{-1}(1 - \alpha). \quad (9)$$

Para facilitar tal inversão numérica, os autores de [3] elaboraram um conjunto de rotinas em MATLAB, as quais estão disponíveis para *download* em [http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~nadler/Wishart\\_Ratio\\_Trace/TW\\_ratio.html](http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~nadler/Wishart_Ratio_Trace/TW_ratio.html).

Vale ressaltar que, embora os resultados apresentados nesta subseção sejam fruto de uma análise de comportamento assintótico ( $m, n \rightarrow \infty$ , com  $n/m \rightarrow c \geq 0$ ) da distribuição dos autovalores da matriz de covariância do sinal recebido, tem-se boa aproximação destes resultados com aqueles obtidos com valores finitos de  $m$  e  $n$ , desde que  $\min(m, n) \square 1$  e desde que a razão  $m/n$  ou  $n/m$  não leve a valores muito grandes [3].

Na próxima subseção, os resultados aqui sumarizados serão aplicados ao método RMT proposto em [3], de forma que o mesmo possa ser comparado com o algoritmo proposto neste artigo, o qual é detalhado na seção seguinte.

### B. O método RMT

O algoritmo proposto em [3] é baseado em uma sequência de testes de hipóteses. Em cada passo testa-se a significância do  $k$ -ésimo autovalor da matriz de covariância do sinal recebido por  $m$  sensores. No algoritmo RMT, para  $k = 1, 2, \dots, \min(m, n) - 1$  faz-se o teste de significância

$$\lambda_k > \hat{\sigma}^2(k)C_{n,m,k}(\alpha), \quad (10)$$

em que  $\hat{\sigma}^2(k)$  é a estimativa da variância de ruído a cada passo e  $C_{n,m,k}(\alpha)$  é o parâmetro que depende do nível de confiança  $\alpha \square 1$  determinado pelo usuário, ou seja,

$$C_{n,m,k}(\alpha) = \mu_{n,m-k} + s(\alpha)\xi_{n,m-k},$$

com  $s(\alpha)$  sendo determinado por meio da expressão (9).

Uma interpretação para  $\alpha$  à luz do teste de hipóteses em (5) é: se somente  $k - 1$  sinais estão presentes e o  $k$ -ésimo autovalor é devido ao ruído, então

$$\Pr \{ \text{rejeitar } \mathcal{H}_0 | \mathcal{H}_0 \} = \Pr \{ \lambda_k > \sigma^2 C_{n,m,k}(\alpha) | \mathcal{H}_0 \} \approx \alpha.$$

Então, no contexto de estimação do número de fontes pelo método RMT,  $\alpha$  corresponde ao valor aproximado da probabilidade de sobrestimação assintótica ( $n \rightarrow \infty$ ).

O número de fontes estimado pelo método RMT é então:

$$\hat{p} = \arg \min_k \{ \lambda_k < \hat{\sigma}^2(k)C_{n,m,k}(\alpha) \} - 1.$$

Pelo exposto percebe-se que o método RMT sugerido em [3] não é simples, pois para que o limiar de decisão seja computado, este necessita da estimativa da variância do ruído,  $\hat{\sigma}^2(k)$ . Por esta razão, em [3], além do algoritmo supracitado, sugere-se também um método para a estimação de  $\sigma^2(k)$ . Soma-se a isto a necessidade de inversão de  $F_\beta(s)$ .

Para ilustrar a operação do método RMT, a Fig. 1 ilustra a distribuição de três grupos de autovalores da matriz  $\hat{\mathbf{R}}$  definida em (2), ordenados e normalizados em relação a seus valores máximos ( $\lambda_1$ ), em função de seus índices ( $i$ ) e considerando  $m = 30$  sensores,  $p = 0$ ,  $p = 5$  e  $p = 15$  transmissores (fontes), relação sinal-ruído RSR =  $-5$  dB e  $n = 1 \times 10^4$  amostras por sensor. Também estão apresentados na Fig. 1 os limiares de decisão do algoritmo RMT, também normalizados em relação a  $\lambda_1$ , admitindo-se conhecimento perfeito da variância de ruído. Nas situações mostradas na figura percebe-se nitidamente que o algoritmo RMT

produziria estimativas corretas do número de fontes, pois o número de autovalores acima de cada um dos limiares é igual ao correspondente valor de  $p$ . Os parâmetros  $\Lambda$  mostrados na Fig. 1 serão descritos na próxima seção.

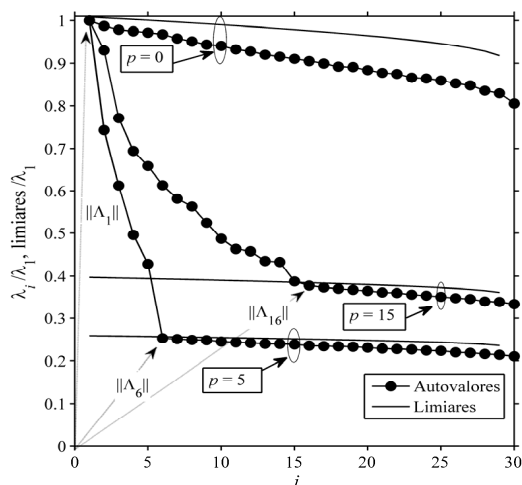


Figura 1. Representação gráfica dos autovalores de  $\hat{\mathbf{R}}$  e limiares de decisão do algoritmo RMT de [3].

#### IV. O MÉTODO NB PROPOSTO

Observa-se na Fig. 1 que há certa evidência de pontos de inflexão (joelhos) nas curvas dos autovalores justamente na transição entre os primeiros  $p$  autovalores e  $m - p$  restantes, exceto no caso de  $p = 0$ . A identificação desses pontos de inflexão está em sintonia com o exposto na Seção II, onde se menciona que é possível estimar o número de fontes a partir da classificação dos autovalores de  $\hat{\mathbf{R}}$  em dois grupos, um contendo os  $p$  maiores e o outro contendo  $m - p$  menores. Esta classificação se torna mais simples à medida que  $\hat{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{R}$  e à medida que a relação sinal-ruído aumenta. Em ambos os casos, mais clara discrepância é observada entre os grupos. Note que esta característica de distribuição dos autovalores é independente da aplicação, bastando apenas que a matriz de canal  $\mathbf{H}$  seja de posto total (*full rank*).

O método NB explora os pontos de inflexão supracitados da seguinte maneira: seja  $\Lambda_i = [\lambda_i / \lambda_1 \ i]^T$  o vetor associado ao  $i$ -ésimo autovalor, correspondente ao  $i$ -ésimo ponto circular na Fig. 1. No caso de  $p = 5$  observa-se que a distância Euclidiana entre  $\Lambda_6$  e a origem, que é igual a  $\|\Lambda_6\|$ , a norma de  $\Lambda_6$ , é a menor entre todas. Em uma primeira análise percebe-se que o índice associado a tal norma poderia ser usado para se determinar o número de fontes. Entretanto, nas situações ilustradas na Fig. 1 em que  $p = 0$  e  $p = 15$  verifica-se que haveria erro na estimativa, pois há vetores com menor norma que os vetores  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_{16}$ , respectivamente. Tal problema pode ser parcialmente resolvido com as seguintes medidas heurísticas: i) primeiro os autovalores e os correspondentes índices são normalizados de forma que se distribuam entre 0 e 1; ii) em seguida acentua-se a curvatura dos autovalores de forma que no caso de  $p = 0$  tenha-se  $\|\Lambda_1\|$  como a menor das normas; iii) por fim, são considerados na busca pela menor norma somente  $K = \lfloor m/2 \rfloor$  vetores do conjunto  $\{\Lambda_i\}$ , em que

$\lfloor m/2 \rfloor$  é o maior inteiro menor ou igual a  $m/2$ . Esta última medida desloca para a direita o ponto de inflexão da curva quando  $p$  é próximo de zero, reduzindo a chance de vetores de índice elevado terem norma menor que  $\|\Lambda_{p+1}\|$ . A escolha de  $K = \lfloor m/2 \rfloor$  foi feita de forma que produzisse maiores chances de acerto do algoritmo principalmente quando o número de fontes é pequeno.

A Fig. 2 reapresenta os autovalores da Fig. 1 normalizados em relação a seus valores máximos (sob o índice  $i$ , com  $i = 1, 2, \dots, m$ ) em conjunto com os autovalores normalizados e modificados de acordo com o que está descrito no parágrafo anterior (sob o índice  $j$ , com  $j = 1, 2, \dots, K$ ). É agora evidente que os novos vetores  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_6$  e  $\Lambda_{16}$  tem normas menores que os demais, permitindo que se estime de forma correta o número de fontes por meio de seus índices. Tal evidência pode ser observada por meio dos arcos de circunferência, os quais são os lugares geométricos de pontos equidistantes da origem. Note que no caso de  $p = 15$  foram utilizados todos os pontos ( $K = m$ ) na normalização do eixo horizontal. Isto sugere que o método aqui proposto pode produzir estimativas mais precisas para um número de fontes não muito elevado em relação a  $m$ . Resultados numéricos apresentados na próxima seção sustentam esta afirmativa, quantificando-a, e mostram que esta não é uma particularidade do método NB.

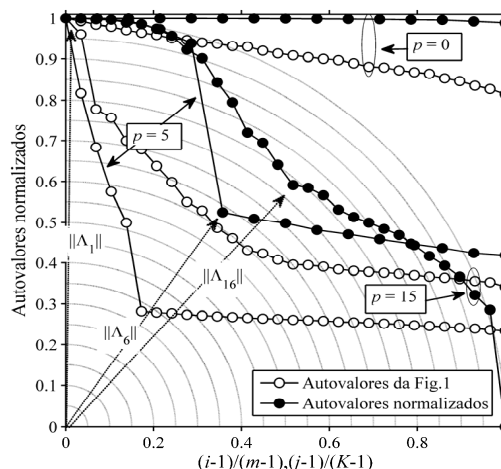


Figura 2. Representação gráfica dos autovalores de  $\hat{\mathbf{R}}$  da Fig. 1 e dos autovalores normalizados (sob índice  $j$ ) segundo o algoritmo NB.

A partir das proposições registradas nesta seção, o algoritmo NB pode ser assim sumarizado:

---



---

**Algoritmo 1 - Algoritmo NB**


---



---

**For**  $i = 1 \dots m$ 

$$a_i \leftarrow \lambda_i - \min(\lambda)$$

$$b_i \leftarrow \frac{a_i}{\max(\mathbf{a})}$$

$$c_i \leftarrow \sqrt{1 - (1 - b_i)^E}$$

**End for**

$$K = \lfloor m/2 \rfloor$$

**For**  $j = 1 \dots K$ 

$$\Lambda_j \leftarrow \left[ c_j \frac{i-1}{K-1} \right]^T$$

**End for**

$$\hat{p} = \arg \min_j \|\Lambda_j\| - 1$$


---



---

O expoente  $E$  no cálculo de  $\{c_i\}$  é a variável que permite controlar a curvatura da curva dos autovalores. A heurística na determinação de seu valor se baseia no exemplo ilustrado na Fig. 3. Nela  $\{b_i\}$  são os autovalores normalizados para a faixa de 0 a 1. Considerando  $p = 0$  e  $n = 50000$ , os autovalores da matriz  $\hat{\mathbf{R}}$  definida em (2) tendem a ficar aproximadamente iguais, o que faz com que os valores de  $\{b_i\}$  se distribuam aproximadamente sobre uma reta. Expoentes  $E > 2$  no cálculo de  $\{c_i\}$  fazem, como desejado, que os autovalores normalizados se distribuam acima do arco de raio unitário.

O valor ótimo de  $E$  pode ser obtido pelo menos de duas maneiras: i) como aquele que maximiza a probabilidade e estimação correta do número de fontes para um conjunto de parâmetros do sistema; ii) como aquele que maximiza a média da probabilidade de estimação correta para vários conjuntos de parâmetros do sistema. Por ser mais conservadora, a segunda alternativa foi utilizada como referência neste trabalho e é ilustrada por meio da Fig. 4, a título de exemplo. Nela é mostrada a variação na probabilidade de estimação correta em função do expoente  $E$ , para os conjuntos de parâmetros dados na Tabela I. Nota-se que o valor de expoente que produz maior média para a probabilidade de estimação correta do número de fontes está por volta de  $E = 5$ . Este valor foi utilizado para compor os resultados numéricos fornecidos na Seção V.

TABELA I. CONJUNTOS DE PARÂMETROS UTILIZADOS NA COMPOSIÇÃO DA FIG. 4.

Curva	$m$	$n$	$p$	RSR, dB
1	10	50	2	0
2	15	50	5	8
3	15	50	5	10
4	15	100	5	8
5	20	100	5	0
6	50	50	2	10
7	50	1000	10	-5
8	50	1000	15	0

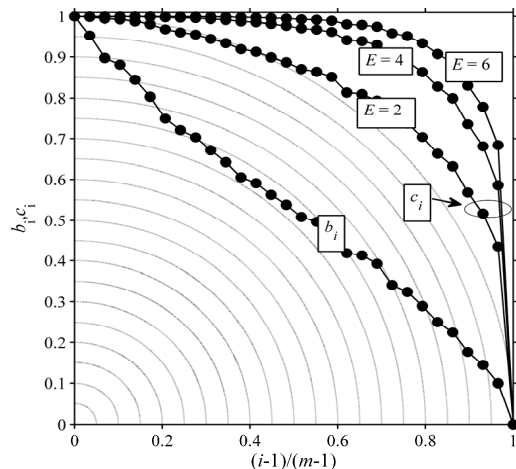


Figura 3. Representação gráfica de  $\{b_i\}$  e de  $\{c_i\}$  para diferentes expoentes  $E$ .

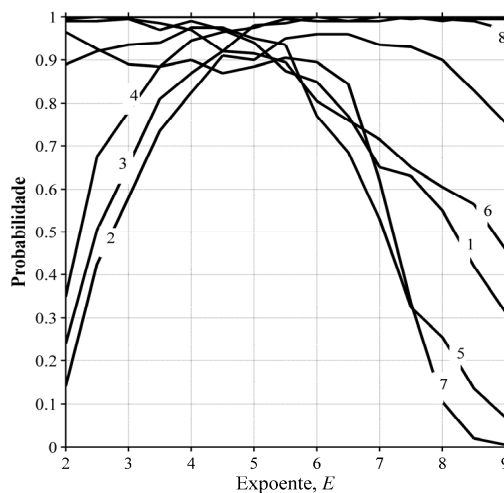


Figura 4. Variação na probabilidade de decisão correta sobre o número de fontes em função do expoente  $E$ .

## V. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados e interpretados alguns resultados de simulação de Monte Carlo do algoritmo proposto em [3], denotado por RMT, e do algoritmo NB aqui proposto. Não foram incluídas comparações com estimadores clássicos tais como o AIC e o MDL, pois como mencionado na Seção I, o método RMT proporciona alta probabilidade de detecção correta em regimes de baixa relação sinal-ruído, característica marcante do estimador AIC, bem como boa consistência em regimes de grandes números de amostras do sinal recebido, característica intrínseca do estimador MDL.

Cada resultado aqui registrado contou com a geração aleatória de 5000 matrizes  $\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{N}$ , com  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  e  $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , sendo que cada elemento nas matrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{N}$  tem distribuição Gaussiana. A distribuição Gaussiana dos elementos de  $\mathbf{H}$  simula um canal com desvanecimento Rayleigh plano e lento (constante durante o intervalo de coleta das amostras). A distribuição Gaussiana dos elementos de  $\mathbf{S}$  é comumente adotada por representar de forma bastante fiel a distribuição de amplitude de sinais tipicamente encontrados

em sistemas de comunicação, por exemplo, sinais multiportadora, tal como o sinal OFDM (*orthogonal frequency division multiplexing*), que é um dos tipos de sinal de transmissão mais adotados nos sistemas de telecomunicações mais modernos, incluindo vários padrões de televisão digital. A distribuição Gaussiana dos elementos de  $\mathbf{N}$  é característica intrínseca ao comportamento estatístico do ruído término gerado na entrada dos receptores.

Considerando potência de transmissão unitária, a relação sinal-ruído é definida por

$$\text{RSR} = \frac{\text{tr}[\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}]}{m p \sigma^2}, \quad (11)$$

em que  $\text{tr}[\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}]$  é o traço da matriz  $\mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}$ . Nos casos em que se considera imprecisão na estimativa de  $\sigma^2$ , que é a variância de ruído utilizada como informação *a priori* no algoritmo RMT, adicionou-se ao valor correto uma variável aleatória com distribuição uniforme em  $[-0,05\sigma^2, 0,05\sigma^2]$ . Os parâmetros fixos adicionais utilizados nas simulações foram  $\alpha = 0,01$  (para o método RMT) e  $E = 5$  (para o método NB). A plataforma de simulação utilizada foi o Matlab<sup>®</sup>.

A Fig. 5 apresenta resultados para a probabilidade de estimação correta ( $P_c$ ) e de sobrestimação ( $P_{se}$ ) do número de fontes  $p$  para  $m = 30$ ,  $n = 1000$ ,  $\text{RSR} = 0$  dB e  $p$  variável. Observa-se que o método NB proporciona  $P_c \approx 1$  para  $p \leq 9$ , enquanto o método RMT proporciona  $P_c \approx 1$  (na verdade  $P_c \approx 1 - \alpha$ ) para  $p \leq 11$ . Em outras palavras, o método NB atinge alta probabilidade de estimação correta para um número de fontes máximo ligeiramente menor que o método RMT, mantendo-se fixos os demais parâmetros sistêmicos. Por outro lado, o algoritmo RMT apresenta significativa redução na probabilidade de estimação correta quando se considera imprecisão na estimativa de  $\sigma^2$ , a qual é utilizada no cômputo do limiar de decisão do algoritmo. Esta redução é mais proeminente para baixos valores de  $p$ . Percebe-se também na Fig. 5 que, para valores de  $p$  até por volta de 13, a probabilidade de sobrestimação  $P_{se}$  do algoritmo RMT é praticamente igual a  $1 - P_c$ , indicando que, quando o algoritmo produz estimativas erradas, os valores estimados estão acima do valor correto. Para valores mais altos de  $p$ ,  $P_c$  começa a cair e  $P_{se}$  continua baixa, indicando que alguns valores de  $p$  estimados com erro estão abaixo do valor correto. No caso do algoritmo NB, nota-se que  $P_{se} \approx 0$  em toda faixa de valores de  $p$ , indicando que, quando o algoritmo produz estimativas erradas, os valores estimados estão abaixo do valor correto. Isto pode representar uma vantagem do algoritmo NB em relação ao RMT, pois pode ser melhor saber que uma estimativa errada está sempre abaixo do valor correto. É importante ressaltar, contudo, que este comportamento do algoritmo NB não necessariamente ocorrerá para qualquer configuração dos parâmetros sistêmicos.

Ainda com relação à Fig. 5 nota-se que o algoritmo NB proporcionou desempenho satisfatório para um número de fontes máximo por volta de  $m/3$ . Este fato estabelece uma útil relação entre o máximo número de fontes que se pode estimar

com alta probabilidade de acerto e o número necessário de sensores.

Na Fig. 6 tem-se resultados de  $P_c$  e  $P_{se}$  para  $m$  variável,  $p = 4$ ,  $\text{RSR} = -4$  dB e 0 dB e  $n = 1000$ . O principal objetivo desta figura é mostrar situações em que o algoritmo NB pode não operar a contento. Perceba que para  $p$  fixo, um aumento de  $m$  pode reduzir de forma drástica o desempenho do método, o que não ocorre com o algoritmo RMT. Nota-se que pode haver um valor ótimo de  $m$  que proporcionará o melhor desempenho a uma dada configuração dos demais parâmetros. Contudo, é importante ressaltar que a redução de desempenho com o aumento de  $m$  pode se tornar menos acentuada se a RSR for aumentada, o que também pode ser notado por meio da Fig. 6. Mais uma vez é nítida a queda de desempenho do algoritmo RMT se há imprecisão na estimativa da variância do ruído.

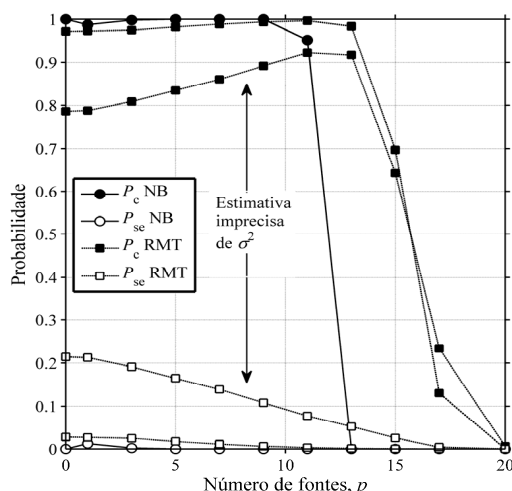


Figura 5. Probabilidade de estimação correta ( $P_c$ ) e de sobrestimação ( $P_{se}$ ) do número de fontes para  $m = 30$ ,  $n = 1000$ ,  $\text{RSR} = 0$  dB e  $p$  variável.

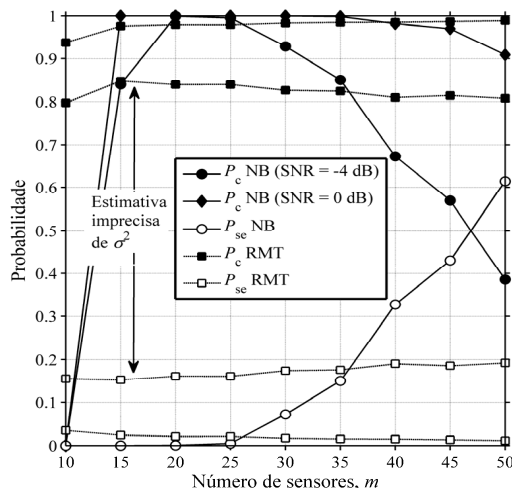


Figura 6. Probabilidade de estimação correta ( $P_c$ ) e de sobrestimação ( $P_{se}$ ) do número de fontes para  $n = 1000$ ,  $p = 4$ ,  $\text{RSR} = -4$  dB e 0 dB e  $m$  variável.

A Fig. 7 mostra resultados de  $P_c$  e  $P_{se}$  para  $m = 30$ ,  $p = 10$ ,  $\text{RSR} = 0$  dB e  $n$  variável. Percebe-se que os algoritmos começam a produzir estimativas com alta probabilidade de

acerto com valores significativamente diferentes para o número de amostras  $n$ . Especificamente, o algoritmo NB pressupõe que sejam coletadas mais amostras para que resulte em uma dada probabilidade de estimação correta, caso a variância do ruído seja estimada com precisão no método RMT. Caso haja imprecisão nesta estimativa, pode-se notar que o algoritmo NB pode atingir altos valores de  $P_c$  mesmo que o número de amostras utilizadas pelo método RMT seja muito maior.

Um aspecto importante a observar na Fig. 7 é a consistência dos estimadores. Note que o estimador NB parece ser *consistente*, ou seja,  $P_c \rightarrow 1$  se  $n \rightarrow \infty$ , embora não se tenha a prova por consequência da dificuldade de tratamento matemático do modelo. Por outro lado, o estimador RMT apresenta o que se denomina em [3] de “consistência aproximada”. Esta aproximação pode ser analisada por vários ângulos: primeiro, note que  $P_c \rightarrow 1 - \alpha$  se  $n \rightarrow \infty$ , o que representa uma certa polarização do estimador, polarização esta que pode ser reduzida à medida que se reduz  $\alpha$ . Por outro lado, se há imprecisão no conhecimento sobre a variância do ruído, o estimador RMT se mostra inconsistente. Tem-se ainda a impressão de que o algoritmo RMT tem valores ótimos de número de amostras que dependem dos demais parâmetros sistêmicos. Esta observação está em consonância com a afirmação do segundo parágrafo após a equação (9), a qual sugere que a análise assintótica que permitiu a determinação do limiar no algoritmo RMT só é precisa para valores finitos de  $m$  e  $n$  se a relação  $m/n$  ou  $n/m$  não leva a um número muito elevado. Além disso, pode-se verificar que em [3] afirma-se que a consistência do algoritmo lá proposto não é satisfeita na totalidade das possibilidades de combinação dos parâmetros sistêmicos, o que corrobora com o comportamento mostrado na Fig. 7. Ainda com relação à Fig. 7, novamente percebe-se o efeito complementar de  $P_c$  e  $P_{se}$  no algoritmo RMT para  $n$  acima de aproximadamente 500. Mais uma vez percebe-se o valor nulo de  $P_{se}$  no algoritmo NB, agora independentemente de do valor de  $n$ .

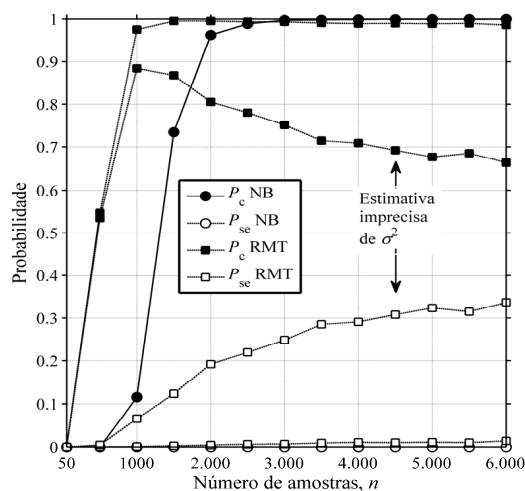


Figura 7. Probabilidade de estimação correta ( $P_c$ ) e de sobrestimação ( $P_{se}$ ) do número de fontes para  $m = 30$ ,  $p = 10$ ,  $RSR = -3$  dB e  $n$  variável.

A Fig. 8 apresenta resultados de  $P_c$  e  $P_{se}$  para RSR variável,

$m = 30$ ,  $p = 10$  e  $n = 1000$ . Observa-se que, embora o algoritmo RMT sofra grande influência da imprecisão na estimativa de  $\sigma^2$ , consegue produzir estimativas do número de fontes com alta probabilidade de acerto sob valores um pouco mais baixos de RSR (cerca de 2.5 dB na situação analisada) que o algoritmo NB. Entretanto, o algoritmo NB apresenta comportamento monotonicamente crescente da probabilidade de estimação correta com o aumento da RSR.

Por fim, é importante ressaltar que embora o algoritmo RMT possa apresentar desempenho superior aos demais aqui analisados, incluindo o algoritmo NB, isto ocorre quando se tem elevada precisão da estimativa da variância de ruído. No entanto, ressalta-se que complexidade computacional inerente ao método RMT não é baixa, sendo esta herdada do próprio processo de estimação de variância de ruído e da necessidade de inversão numérica da distribuição de Tracy-Widom para determinação do limiar de decisão. Como se pode observar no **Algoritmo 1**, o método NB requer simples operações em seu corpo, resultando, portanto, em uma carga computacional significativamente menor que o algoritmo RMT.

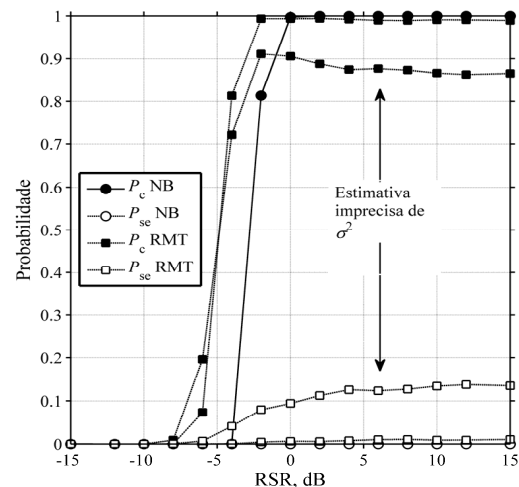


Figura 8. Probabilidade de estimação correta ( $P_c$ ) e de sobrestimação ( $P_{se}$ ) do número de fontes para  $m = 30$ ,  $p = 10$ ,  $n = 1000$  e RSR variável.

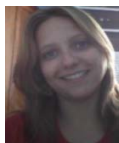
## VI. CONCLUSÃO

Neste artigo foi proposto um novo método empírico para se estimar por meio de múltiplos sensores, o número de fontes de sinais contaminados por ruído, em canal com desvanecimento. Além de produzir estimativas consistentes à medida que o número de amostras aumenta, o algoritmo proposto possui comportamento monotonicamente crescente da probabilidade de estimação correta, tanto com o aumento da RSR quanto com a redução no número de fontes. Verificou-se ainda que o algoritmo proposto consegue estimar um número de fontes máximo ligeiramente menor que o algoritmo baseado na teoria de matrizes aleatórias e operar satisfatoriamente sob uma RSR ligeiramente superior. No entanto, para um número pequeno de fontes e para valores elevados de RSR, o desempenho do algoritmo proposto se mostrou superior. Vale ainda lembrar que, ao contrário do algoritmo baseado na teoria de matrizes aleatórias, o algoritmo aqui proposto não pressupõe o conhecimento *a priori* de nenhum parâmetro e não necessita

estimar nenhum outro, exceto os autovalores da matriz de covariância do sinal recebido, como o faz também o algoritmo baseado na teoria de matrizes aleatórias.

#### REFERÊNCIAS

- [1] B. Nadler, "Nonparametric Detection of signals by Information Theoretic Criteria: Performance Analysis and an Improved Estimator", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 58, 5, pp. 2746-2756, May. 2010.
- [2] M. Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria", *IEEE Trans. Signal Process*, vol. 33, 2, pp. 387-392, Apr. 1985.
- [3] E. S. Kritchman and B. Nadler, "Non-parametric Detection of the Number of Signals: Hypothesis Testing and Random Matrix Theory", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 57, 10, pp. 3930-3941, Oct. 2009.
- [4] S. Kritchman and B. Nadler, "Determining the number of components in a factor model from limited noisy data", Elsevier, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, pp. 19-32, June 2008.
- [5] R. K. Swamy, S. R. Murty and B. Yegnanarayana, "Determining number of speakers from multispeaker speech signals using excitation source information", *IEEE Sig. Process*, vol. 14, 7, pp. 481-484, July 2007.
- [6] M. Chiani and M. Z. Win, "Estimating the Number of Signals Observed by Multiple Sensors", *International Workshop on Cognitive Information Processing*, June 2010.
- [7] E. Fishler M. Grosman and H. Messer, "Determining the Number of Discrete Alphabet Sources from Sensor Data", *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, pp. 4-12, 1, Jan. 2005.
- [8] E. Fishler and H. V. Poor, "Estimation of the Number of Sources in Unbalanced Arrays via Information Theoretic Criteria", *IEEE Signal Proc.*, vol. 53, 9, pp. 3543-3553, Sept. 2005.
- [9] A. Ghasemi and E.S. Souza, "Spectrum Sensing in Cognitive Radio Networks: Requirements, Challenges and Design Trade-offs" *IEEE Communications Magazine*, vol. 46, 4, pp. 32-39, Apr. 2008.
- [10] A. Bruckstein, T. J. Shan, and T. Kailath, "The resolution of overlapping echoes", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 33, 6, pp. 1357-1367, Dec. 1985.
- [11] N. Arkind and B. Nadler, "Parametric Joint Detection-Estimation of the Number of Sources in Array Processing", *Sensor Array and Multichannel Signal Process. Workshop, IEEE*, pp. 269-272, Oct. 2010.
- [12] M. Atashbar and M. H. Kahaei, "Direction-Of-Arrival Estimation Using AMLSS Method," *Latin America Transactions, IEEE (Revista IEEE America Latina)*, vol.10, no.5, pp.2053,2058, Sept. 2012
- [13] P. Stoica and Y. Selén, "Model-order selection: a review of information criterion rules", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 21, 4, pp. 36-47, July 2004.
- [14] S. N. Roy, "On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis," *Ann. Math. Stat.*, vol. 24, 2, pp. 220-238, 1953.



**Patrícia Maria Soares** nasceu em Belo Horizonte, MG, em novembro de 1986. Em maio de 2011 recebeu o título de Engenheira de Telecomunicações pela Fundação Mineira de Educação e Cultura (FUMEC). Em agosto de 2011 iniciou o Mestrado em Telecomunicações do Inatel e desde então realiza pesquisas em processamento de sinais para sistemas de Rádios Cognitivos, especificamente sobre algoritmos empíricos para estimação do número de fontes. Antes trabalhou na Top Digital, elaborando relatórios de conformidade, e na CEMIG Telecom com redes SDH.



**Dayan Adionel Guimarães** nasceu em Carrancas, MG, em 01 de março de 1969. Possui os títulos: Técnico em Eletrônica (ETE FMC, 1987), Engenheiro Eletricista (Inatel, 1994), Especialista em Engenharia de Comunicação de Dados (Inatel, 2003), Especialista em Administração com ênfase em Gerência de RH (FAI, 1996), Mestre em Engenharia Elétrica (Unicamp, 1998) e Doutor em Engenharia Elétrica (Unicamp, 2003). De 1988 a 1993 desenvolveu sensores e equipamentos para instrumentação industrial e controle e também foi Supervisor de Produção e Supervisor de Engenharia de Produtos na SENSE Sensores e Instrumentos. Desde janeiro de 1995 é Professor do Inatel onde, por oito anos, foi responsável pela estrutura que dá apoio às atividades de ensino prático nas áreas de Telecomunicações, Eletrônica e Eletrotécnica. Suas pesquisas incluem aspectos gerais sobre Transmissão Digital e Comunicação Móvel. Seu mais recente interesse situa-se na aplicação de

técnicas de Otimização Convexa em Telecomunicações, assunto de seu programa de Pós-Doutorado na UFSC, realizado em 2010. É membro do Conselho do Mestrado do Inatel e do Corpo Editorial da revista Telecomunicações (Inatel). Hoje ocupa a posição de Professor Titular do Inatel em regime de dedicação por tempo integral.



**Rausley Adriano Amaral de Souza** nasceu em Passos, MG, em 08 de março de 1972. Possui graduação em Engenharia Elétrica pelo Inatel - Instituto Nacional de Telecomunicações (1994), Mestrado em Engenharia Elétrica pelo Inatel (2002) e Doutorado em Engenharia Elétrica pela Unicamp - Universidade Estadual de Campinas (2009). Atualmente é professor adjunto do Inatel. Atuou por seis anos como coordenador adjunto para o programa de pós-graduação Lato Sensu do Inatel. Atuou como professor adjunto da Faculdade de Medicina de Itajubá. Já publicou artigos em revistas do IEEE e em congressos internacionais. Tem experiência na área de Engenharia Elétrica, com ênfase em Telecomunicações, atuando principalmente na área de comunicações sem fio. Tem experiência na indústria nas áreas produtiva e de suprimentos. Suas pesquisas incluem aspectos gerais sobre Transmissão Digital, Comunicação Móvel e canais com desvanecimento. Seu mais recente interesse situa-se em técnicas de sensoriamento espectral para sistemas de Rádio Cognitivo. Hoje ocupa a posição de Professor Titular do Inatel em regime de dedicação por tempo integral e é Pesquisador Produtividade em Pesquisa Nível 2 do CNPq.